

研究種目：基盤研究（C）

研究期間：2006～2008

課題番号：18540217

研究課題名（和文） n-調和写像と多様体の共形幾何構造の研究

研究課題名（英文） n-harmonic maps and conformal structures  
on Riemannian manifolds

研究代表者

中内 伸光（NAKAUCHI NOBUMITSU）

山口大学・大学院理工学研究科・准教授

研究者番号：50180237

研究成果の概要：

本研究課題の研究の過程で、写像の共形性を調べる必要があり、その研究を進めた。リーマン多様体  $(M, g)$  からリーマン多様体  $(N, h)$  へのなめらかな写像  $f$  に対して、テンソル  $T_f = f^*h - 1/m |df|^2 g$  のノルムの二乗の積分で定義される汎関数を調べた。ここで、 $f^*h$  は  $f$  による pull-back metric で、 $m$  はリーマン多様体  $(M, g)$  の次元である。第1変分公式、第2変分公式、monotonicity formula タイプの評価式（この場合、monotone non-decreasing にはならない）、Bochner formula タイプの評価式などが得られた。現在も、研究を進めている。

交付額

（金額単位：円）

|        | 直接経費      | 間接経費    | 合計        |
|--------|-----------|---------|-----------|
| 2006年度 | 1,300,000 | 0       | 1,300,000 |
| 2007年度 | 1,000,000 | 300,000 | 1,300,000 |
| 2008年度 | 1,100,000 | 330,000 | 1,430,000 |
| 年度     |           |         |           |
| 年度     |           |         |           |
| 総計     | 3,400,000 | 630,000 | 4,030,000 |

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：n-harmonic map, conformal geometric structure,

## 1. 研究開始当初の背景

Harmonic maps は幾何学的な応用も含めて、多くの研究がなされている分野である。実際、harmonic maps の研究とともに

に、その結果を用いて、多様体の構造や剛性 (rigidity) などが調べられてきた。共形幾何構造という観点から見ると、一般に、harmonic maps が共形不変性をもつのは source manifold の次元  $n$  が 2 の場合の

みである。次元  $n$  が一般次元のとき、共形不変性をもつのは, harmonic maps でなく,  $n$ -harmonic maps という概念である。これが本研究の動機である。

## 2. 研究の目的

上記の背景のもとで,  $n$ -harmonic maps を用いて, 多様体の共形幾何構造を調べることを目的とした。そのために, 共形幾何構造の研究を念頭においた  $n$ -harmonic maps, さらに, 一般の  $p$ -harmonic maps の研究を行うことが本研究の目的である。

## 3. 研究の方法

これまでの  $p$ -harmonic maps の研究は, 主に解析学的な結果を目的とした解析学的観点からの解析的手法である。本研究は, 幾何学的不変量との関連を研究することを目的として, 幾何学的観点から解析的手法を用いた。

## 4. 研究成果

本研究課題の研究の過程で, 写像の共形性を調べる必要があり, その研究を進めた。リーマン多様体  $(M, g)$  から  $(N, h)$  へのなめらかな写像  $f$  に対して, テンソル  $T_f = f^*h - 1/m |df|^2 g$  のノルムの二乗の積分で定義される汎関数を調べた。ここで,  $f^*h$  は  $f$  による pull-back metric で,  $m$  はリーマン多様体  $(M, g)$  の次元である。第 1 変分公式, 第 2 変分公式, monotonicity formula タイプの評価式 (この場合, monotone increasing にはならない), Bochner formula タイプの評価式などが得られた。現在も, 研究を進めている。

分担者高桑は,  $n$  次元 Riemann 多様体

$M$  から Riemann 多様体  $N$  への  $p$ -harmonic maps の列は,  $p$ -energy が一様有界でも収束列をもたないが, 障害として現れる  $(n-p)$  次元の部分集合  $S$  が rectifiable 集合 (高々可算個の  $C^1$  級の部分多様体の和として表せる) であることを示し, さらに defect measure と呼ばれる  $S$  上の Radon 測度が  $(n-p)$  次元の Hausdorff 測度と rectifiable 集合を用いて具体的に記述できることを示した。この結果の応用として  $p$ -harmonic maps の 1 階微分の評価を得た。  $p$ -energy 密度を用いて定義されるポテンシャルが一様有界であるような  $p$ -harmonic maps の 1 階微分はポテンシャルの上限を用いて評価できることを示した。さらに, ユークリッド空間上の  $p$ -harmonic maps に対する Liouville の定理を証明した。

分担者内藤は, グラスマン幾何的曲面論の観点からの研究を行い, 6 種類ある全ての 3 次元ユニモジュラーリー群ごとに, グラスマン幾何的曲面論の部分多様体論を展開, 決定し, 性質を明らかにした。

分担者小宮は,  $G$  多様体の cut and paste 同値について考察し, とくに  $G$  が位数 2 の巡回群の場合に, 与えられた  $G$  多様体が 2 つの  $G$  多様体の積と cut and paste 同値になるための必要十分条件を得た。さらに, 孤立不動点をもつ  $G$  多様体について考察し, 多様体の次元が奇数ならば, 孤立不動点の個数は偶数であること, および 2 つの孤立不動点の周りの  $G$  表現は同型であるという結果を得た。

最後になりましたが, 3 年間の研究期間において, 本研究課題の遂行をサポートしていただいた研究分担者の方々にお礼申し上げます。また, 本研究に補助金を交付していただいた文部科学省および日本学術振

興会に心から感謝致します。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者, 研究分担者及び連携研究者  
には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

(1) Inoguchi, Jun-ichi and Hiroo Naitoh,  
Grassmann geometry on the  
3-dimensional unimodular Lie groups I,  
Hokkaido Math. J. to appear.

(2) Katsuhiko Komiya, Tangential  
representations at isolated fixed points  
of odd-dimensional G-manifolds, Bull.  
Korean Math Soc. 45(2008), 33-37

(3) Isao Kiuchi and Yoshio Tanigawa,  
Bounds for triple zeta-functions ,  
Indagationes Mahem, N. S. 19 (2008),  
97--114.

(4) Yoshihisa Sato, 2-spheres of square -1  
and the geography of genus -2 Lefschetz  
fibrations, J. Mathematical. Sciences,  
15 (2008), 461—491.

(5) Katsuhiko Komiya, The  
decomposability of  $Z_2$ -manifolds in  
cut-and-paste equivalence, Tokyo J.  
Math. 30(2007), 285-291

(6) Isao Kiuchi and Yoshio Tanigawa,  
Bounds for double zeta-functions ,  
Annali Scuola Normale Superiore di Pisa,  
Classe di Scienze V. (2006), 445--464

[学会発表] (計 4 件)

(1) Shoichiro Takakuwa, 「非有界領域上の極  
小曲面の方程式に関する Meeks の予想」 研  
究集会「多様体上の微分方程式」, 2008 年 12  
月 1 日～3 日, いしかわシティカレッジ (金  
沢市)

(2) Hiroo Naitoh, Unimodular Lie 群上  
のグラスマン幾何, 2008 年 10 月 9 日,  
広島幾何学研究集会 2008 「リー群と幾  
何構造」

(3) Shoichiro Takakuwa, 「p-harmonic maps  
の空間のコンパクト性」 研究集会「多様体  
上の微分方程式」, 2007 年 12 月 10 日～12  
日, いしかわシティカレッジ (金沢市)

(4) Katsuhiko Komiya, "Cutting and  
patsting of G-manifolds and families of  
submanifolds", 2006 年 7 月 10 日, 15-th  
Brazilian Topology Meeting, Rio Claro,  
Brazil,

[図書] (計 0 件)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

○取得状況 (計 0 件)

[その他]

ホームページ等 なし

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

中内 伸光 (NAKAUCHI NOBUMITSU)  
山口大学・理工学研究科, 准教授)  
研究者番号 : 50180237

### (2) 研究分担者

高桑 昇一郎 (TAKAKUWA SHOICHIRO)  
首都大学東京・都市教養学部・教授)  
研究者番号 : 10183435

河合 茂生(KAWAI SHIGEO) (2006, 2007)  
佐賀大学・文化教育学部・教授  
研究者番号：30186043

竹内 博(TAKEUCHI IROSHI) (2006, 2007)  
四国大学・経営情報学部・教授  
研究者番号 20197271

内藤 博夫(NAITOH HIROO)  
山口大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：10127772

小宮 克弘(KOMIYA KATSUHIRO)  
山口大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：00034744

木内 功(KIUCHI ISAO)  
山口大学・大学院理工学研究科・教授  
研究者番号：30271076

佐藤好久 (SATO YOSHIHISA)  
山口大学・教育学部・准教授  
研究者番号：90231349

岡田真理(OKADA MARI)  
山口大学・大学院理工学研究科・准教授  
研究者番号：40201389

### (3) 連携研究者

河合 茂生(KAWAI SHIGEO) (2008)  
佐賀大学・文化教育学部・教授  
研究者番号：30186043

竹内 博(TAKEUCHI HIROSHI) (2008)  
四国大学・経営情報学部・教授  
研究者番号 20197271