

平成 21 年 6 月 1 日現在

研究種目：基盤研究 (C)
 研究期間：2006～2008
 課題番号：18540218
 研究課題名 (和文) 特異磁場をもつシュレーディンガー作用素とアハラノフ・ボーム効果
 研究課題名 (英文) Schrödinger operators with singular magnetic fields and Aharonov-Bohm effect
 研究代表者
 伊藤 宏 (ITO HIROSHI)
 愛媛大学・理工学研究科・教授
 研究者番号：90243005

研究成果の概要：量子力学特有の効果として、アハラノフ・ボーム効果がある。古典電磁気学と異なり、電子の存在するところに磁場がなくても、ベクトルポテンシャルを通して電子は磁場の影響を受けるというものである。電子が存在できない複数個の点に磁場が集中している特異磁場による2次元散乱問題を考え、その散乱振幅の準古典的挙動を計算した。さらに、この効果に関係する固有値問題や、遠方で発散する電場ポテンシャルをもつディラック作用素のスペクトルについても結果を得た。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,200,000	0	1,200,000
2007年度	1,100,000	330,000	1,430,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	660,000	4,060,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：関数方程式の大域理論, 数理物理, スペクトル理論, 散乱理論

1. 研究開始当初の背景

磁場をもつシュレーディンガー (Schrödinger) 作用素のスペクトル構造や散乱現象は、磁場がない場合と比べきわめて多様で興味深いものとなる。そのため、これらの研究は従来からスペクトル・散乱理論の中心的な研究となっている。

磁場が関係する量子力学の効果で注目すべきものとして、アハラノフ・ボーム効果 (A B 効果) がある。古典電磁気学においては物

理的な実在がない数学的な量と考えられたベクトルポテンシャルは、量子力学においては物理的実在であることを主張する現象である。すなわち、磁場の存在しない場所でも、電子はベクトルポテンシャルを介して磁場の影響を受けることが知られている。

特異磁場をもつシュレーディンガー作用素の散乱問題やスペクトルの解析は、アハラノフ・ボーム効果を数学的にどのように取り出すかという問題と関連している。多くの研

究があるが、その多くが可解なモデルの計算によるもので、可解でないモデルに対する厳密な数学的な研究は、数学的な解析の困難さからあまり進んではいなかった。日本では、伊藤（研究代表者）と田村（連携研究者）による高エネルギーでの散乱振幅の漸近挙動や、峯（連携研究者）による特異磁場に定数磁場を加えた作用素の固有値の漸近分布の解析、峯と野村（連携研究者）による周期磁場の場合の研究が行われていた。このように、特異磁場をもつシュレーディンガー作用素の研究は様々な方向への発展の可能性があると思われた。

2. 研究の目的

特異磁場をもつシュレーディンガー作用素の研究を中心に、関連するスペクトル・散乱理論分野の研究を、研究代表者がとりまとめとなって連携研究者とともに協力して進めていく。

主な研究の目的

- (1) 特異磁場をもつシュレーディンガー作用素のスペクトル構造や散乱振幅においてアハラノフ・ボーム効果を取り出すこと。
- (2) アハラノフ・ボーム効果は量子力学的な効果である。プランク定数をゼロに近づける準古典的極限においてアハラノフ・ボーム効果を含んでいる散乱振幅やスペクトル構造の挙動を詳しく解析すること。

関連する研究の目的

- (3) 線状磁場の位置がランダムなシュレーディンガー作用素のスペクトル解析
- (4) 特異磁場をもつディラック作用素のスペクトル解析
- (5) 特異な係数をもつ波動方程式の散乱問題

3. 研究の方法

(1) 「解析セミナー」、「作用素論セミナー」、「夏の作用素論シンポジウム」、「実関数論・函数解析学合同シンポジウム」などのセミナーやシンポジウムを利用して、関連する研究の情報収集や研究代表者および連携研究者間の研究連絡、また他の研究者とのお互いの研究に関する議論などを行った。海外での研究集会にも参加して、日本以外での関連する研究の情報収集や海外の研究者との議論を行った。

(2) 課題研究のために必要な書籍を購入した。また、パソコンを使って、インターネットによる情報収集や研究者間の研究連絡、また論文作成を行った。

(3) 研究代表者や連携研究者は、以下の役割分担で研究を行った。

① 伊藤 宏：

とりまとめ、複数の δ 型磁場を持つシュレーディンガー作用素の散乱振幅の準古典的挙

動の解析、および遠方で発散する伸張解析的なポテンシャルをもつディラック作用素のスペクトル解析。

② 野村 祐司：

周期的なアハラノフ・ボーム磁場と定数磁場をもつシュレーディンガー作用素のスペクトル解析、ランダムなアハラノフ・ボーム磁場をもつシュレーディンガー作用素のスペクトル解析、グラフ上の作用素の解析。

③ 門脇 光輝：

減衰項をもつ波動作用素の解析。

④ 田村 英男：

複数の δ 型磁場を持つシュレーディンガー作用素の散乱問題の準古典的解析。

⑤ 岩塚 明：

特異磁場を持つ3次元シュレーディンガー作用素の解析。

⑥ 山田 修宣：

ディラック作用素のスペクトル解析。

⑦ 峯 拓矢：

周期的なアハラノフ・ボーム磁場を定数磁場をもつシュレーディンガー作用素のスペクトル解析、ランダムなアハラノフ・ボーム磁場をもつシュレーディンガー作用素のスペクトル解析

4. 研究成果

研究代表者および連携研究者による主な成果を以下に述べる。いくつかの結果は国際的な専門誌に掲載されている。また、海外の研究集会での招待講演で発表された結果もある。今後の進展も期待される研究である。

(1) 特異磁場をもつシュレーディンガー作用素の散乱振幅の準古典的解析

複数のデルタ型磁場を持つ2次元シュレーディンガー作用素を考えた。磁場の存在する領域が点の集まりであることから、対応する古典力学では散乱は起こらないと考えられる。しかし、量子力学では可解モデルでの散乱振幅の計算結果から散乱は起こると考えられている(アハラノフ・ボーム効果)。一方、量子力学に現れる量はプランク定数を小さくする準古典的極限では古典力学の対応する量を用いて記述できると考えられている。アハラノフ・ボーム効果は古典電磁気学には存在しない量子力学特有の効果である。したがって、散乱振幅の準古典的挙動を解析することは非常に興味深いこととなる。伊藤と田村は、散乱振幅のプランク定数に関する漸近展開を第3項まで求め、各項に散乱される古典的粒子の軌道に対応させることができることを示した(論文6)。さらに、田村は、符号の違う同じ大きさの磁束をもつ2つのデルタ型磁場による散乱を考え、その全散乱断面積の準古典的挙動を解析し、第3項までを具体的に表現することに成功した。古典的な粒子では散乱は起こらないので、こ

これらの項は量子力学的なアハラノフ・ボーム効果による。しかし、これらの項については古典的な粒子の散乱と結びつける解釈が可能である(論文 5)。また、田村は、spectral shift function と time delay に関する準古典的挙動を決定した。これらの量は2つの磁場の中心の間に捕捉される電子の古典的な描像とうまく合致しており、レゾナンスとの関係を物語っている。このため、今後のレゾナンスの研究に対して重要な結果である(論文 3)。

(2) ディラック作用素のスペクトル解析について

伊藤と山田は、ある種の解析性を持ち遠方で発散するポテンシャルをもつディラック作用素とシュレーディンガー作用素のスペクトル構造の違いを2つの相対論的シュレーディンガー作用素を介在させて解析した。最初に、2つの相対論的シュレーディンガー作用素のスペクトルを決定した。次に、この結果に摂動論を組み合わせることで、なぜ光速が大きいときにはシュレーディンガー作用素の固有値近くにディラック作用素のレゾナンスが存在し、光速を無限大にする極限(非相対論的極限)ではそのレゾナンスがその固有値に収束するのか?ディラック作用素の絶対連続スペクトルが非相対論的極限において消滅するのはなぜか?について明快な説明を与えた。また、非相対論的極限において、ディラック作用素のスペクトル測度とシュレーディンガー作用素のスペクトル測度の関係を見出した。この研究の過程で、ある種の解析的な作用素族の境界値で定義される自己共役作用素のスペクトルが2種類に分類できることを示した。磁場を入れて同様の問題を考察することは今後解決すべき興味深い問題である。(発表 5, 6, 14)

(3) ランダムな δ 型磁場をもつシュレーディンガー作用素のスペクトル

峯と野村は、定数磁場とランダム (Anderson 型または Poisson-Anderson 型) なアハラノフ・ボーム磁場をもつシュレーディンガー作用素のスペクトルについて調べた。定数磁場が大きいときには、下の方のランダウ・レベルは、すべて無限多重度であることを証明した。(論文 1)

(4) 周期的な δ 型磁場をもつシュレーディンガー作用素のスペクトル

峯と野村は、一様磁場とランク 2 の格子の上に周期的に配された δ 型特異磁場を考察した。磁場としては、格子点以外では定数磁場と一致するため、スペクトルに対して δ 型特異磁場によるアハラノフ・ボーム効果がどのように現れるかが興味の対象である。F を周期構造からくる基本領域を貫くフラックスの量とする。磁場ブロッホ解析、楕円関数、

正準交換関係を使って、F の大きさによって、ランダウ準位が多重度無限大の固有値になるための条件を与えた。さらに、F の閾値においては、スペクトルの下端において絶対連続スペクトルが現れることを示した。またランダウ準位およびランダウ準位間に現れるスペクトルの状態密度関数の評価を与えた。

(論文 7)

(5) 3次元アハラノフ・ボーム効果

岩塚と峯は、島田伸一(摂南大学)とともにトーラス内に閉じ込められた磁場をもつ3次元シュレーディンガー作用素を考えた。ベクトルポテンシャルを適当に選び、磁束を一定にしたままトーラスの断面を小さくしていくとき、その作用素がある作用素の収束することを示した。この結果は、2次元のアハラノフ・ボーム効果を3次元で考える上で重要な第一歩である。(発表 3, 9)

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 10 件)

1. Mine, Takuya and Nomura, Yuji, The spectrum of Schrodinger operators with random δ magnetic fields, to appear in Annales de l'Institut Fourier.

(査読あり)

2. Higuchi, Yusuke and Nomura, Yuji, Spectral structure of Laplacian on a covering graph, European Journal of Combinatorics **30** (2009), 570-585.

(査読あり)

3. Tamura, Hideo, Time delay in scattering by potentials and by magnetic fields with two supports at large separation, J. Funct. Anal. **254** (2008), no. 7, 1735-1775.

(査読あり)

4. Higuchi Yusuke and Nomura Yuji, Non-separating 2-factors of an even-regular graph, Discrete Mathematics **308** (2008), 5538-5547.

(査読あり)

5. Tamura, Hideo, Semiclassical analysis for magnetic scattering by two solenoidal fields: total cross sections. Ann. Henri Poincare **8** (2007), no. 6, 1071-1114.

(査読あり)

6. Ito, Hiroshi T and Tamura, Hideo, Semiclassical analysis for magnetic scattering by two solenoidal fields, J. London Math. Soc., (2) **74**, (2006), no. 3, 695-716.

(査読あり)

7. Mine, Takuya and Nomura, Yuji, Periodic Aharonov-Bohm solenoids in a constant magnetic field, Rev. Math. Phys. **18** (2006), no. 8, 913-934.

(査読あり)

8. Ichinose, Takashi and Tamura, Hideo, Exponential product approximation to the integral kernel of the Schrodinger semigroup and to the heat kernel of the Dirichlet Laplacian. J. Reine Angew. Math. **592** (2006), 157-188.

(査読あり)

9. Winklmeier, Monika and Yamada, Osanobu, Spectral analysis of radial Dirac operators in the Kerr-Newman metric and its applications to time-periodic solutions.,

J. Math. Phys., **47-10-102503**, 1-17, 2006

(査読あり)

10. Ando, Kazunori, Iwatsuka, Akira, Kaminaga, Masahiro and Nakano, Fumihiko, The spectrum of Schrodinger operators with Poisson type random potential, Ann. Henri Poincare **7** (2006), no. 1, 145-160.

(査読あり)

[学会発表] (計 22 件)

1. 田村 英男, 磁場散乱におけるアハラノフ・ボーム効果に対する准古典漸近解析, 日本数学会特別講演, 2009年3月26日, 東京大学.

2. 門脇 光輝, 中沢 秀夫, 渡辺 一雄, On scattering for wave equations with dissipative terms in layered media, 日本数学会一般講演, 2009年3月26日, 東京大学

3. Akira IWATSUKA, Takuya MINE, Shin-ichi SHIMADA, Norm resolvent convergence to Schrödinger operators with singular magnetic fields supported by a circle in \mathbb{R}^3 , "Schrödinger Equations and Related Topics", January 6, 2009, 東京大学.

4. 野村 祐司, 峯 拓矢, The spectrum of Schrödinger operators with periodic Aharonov-Bohm magnetic fields, RIMS 研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」, 2008年12月3日, 京都大学.

5. 伊藤 宏, 山田 修宣, On the nonrelativistic limit of Dirac operators with potentials diverging at infinity, RIMS 研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」, 2008年12月5日, 京都大学.

6. 伊藤 宏, 山田 修宣, Dirac 作用素の非相対論的極限について, 日本数学会一般講演, 2008年9月26日, 東京工業大学.

7. 野村 祐司, 峯 拓矢, ランダム δ 磁場におけるリフシツ・テイルについて, 日本数学会一般講演, 2008年9月26日, 東京工業大学.

8. 野村 祐司, 峯 拓矢, 周期的 Aharonov-Bohm 磁場を持つシュレーディンガー作用素のスペクトルについて, 2008年夏の作用素論シンポジウム, 2008年9月8日, 佐賀市民活動センター.

9. Akira IWATSUKA, Takuya MINE, Shin-ichi SHIMADA, Norm resolvent convergence to Schrödinger operators with infinitesimally thin toroidal magnetic fields, in "Spectral and Scattering Theory for Quantum Magnetic system", July 8, 2008, CIRM, Marseille.

10. 山田 修宣, M. Winklmeier, Spectral analysis of Dirac equations in the Kerr-Newman metric and its applications, 日本数学会一般講演, 2008年3月25日, 近畿大学.

11. 野村 祐司, 峯 拓矢, Schrödinger operators with random δ magnetic fields, RIMS 研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」, 2008年1月15日, 京都大学.

12. 田村 英男, Semiclassical analysis for magnetic scattering by two solenoidal fields, 研究集会「微分方程式の総合的研究」, 2007年12月14日, 東京大学.

13. 野村 祐司, 群上のラプラシアン, 2007年夏の作用素論シンポジウム, 2007年9月20日, 青森県観光物産館アスパム.

14. 伊藤 宏, ディラック作用素の非相対論的極限について, 2007年夏の作用素論シンポジウム, 2007年9月20日, 青森県観光物産館アスパム.

15. 岩塚 明, Norm convergence for Schrödinger operators with singular magnetic fields, 2007年夏の作用素論シンポジウム, 2007年9月19日, 青森県観光物産館アスパム.

16. 峯 拓矢, 特異磁場を持つシュレーディンガー作用素の定義域について, 2007年夏の作用素論シンポジウム, 2007年9月19日, 青森県観光物産館アスパム.

17. 伊藤 宏, ディラック作用素の非相対論的極限について, 数理セミナー, 2007年9月10日, 同志社大学.

18. 伊藤 宏, 山田 修宣, A note on the nonrelativistic limit of Dirac operators and spectral concentration, RIMS 研究集会「スペクトル・散乱理論とその周辺」, 2007年2月7日, 京都大学.

19. 伊藤 宏, ディラック作用素のスペクトルについて, 第13回「超局所解析と古典解析」, 2006年11月24日, 郡上市せせらぎ街道の宿 たかお.

20. 峯 拓矢, ランダム δ 磁場を持つシュレーディンガー作用素について, 第13回「超局所解析と古典解析」, 2006年11月24日, 郡上市せせらぎ街道の宿 たかお.

21. 田村 英男, ソレノイド磁場による散乱におけるレゾナンスについて, 第13回「超局所解析と古典解析」, 2006年11月24日, 郡上市せせらぎ街道の宿 たかお

22. 田村 英男, Aharonov-Bohm effect in scattering by two solenoidal fields, 研究集会 微分方程式についての最近の話題, 2006年10月21日, 群馬大学東京オフィス.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

伊藤 宏 (ITO HIROSHI)
愛媛大学・理工学研究科・教授
研究者番号: 90243005

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

野村 祐司 (NOMURA YUJI)
愛媛大学・理工学研究科・准教授
研究者番号: 40282818

門脇 光輝 (KADOWAKI MITSUTERU)
愛媛大学・理工学研究科・准教授
研究者番号: 70300548

田村 英男 (TAMURA HIDEO)
岡山大学・理学部・教授
研究者番号: 30022734

岩塚 明 (IWATSUKA AKIRA)
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・教授
研究者番号: 40184890

山田 修宣 (YAMADA OSANOBU)
立命館大学・理工学部・教授
研究者番号: 70066744

峯 拓矢 (MINE TAKUYA)
京都工芸繊維大学・工芸科学研究科・准教授
研究者番号: 90378597