

平成 21 年 6 月 6 日現在

研究種目：基盤研究(C)
 研究期間：2006～2008
 課題番号：18560065
 研究課題名（和文） 超離散化手法による保存的セルオートマトンとその粒子系の研究
 研究課題名（英文） A study on conserved cellular automata and their particle systems by ultradiscrete method.
 研究代表者
 松木平 淳太 (MATSUKIDAIIRA JUNTA)
 龍谷大学・理工学部・教授
 研究者番号：60231594

研究成果の概要：本研究の主な成果は以下の通りである。(1) 2つの保存量を持つ3階の可積分差分方程式が、2階の可積分差分方程式であるQRT系のペアから構成されることを示した。(2) 2階の可積分差分方程式であるQRT系から、明示的なリャプノフ関数を持つ差分方程式系を構成した。(3) QRT系と周期を持つ変換を組み合わせることによって、高次の保存量を持つ2階の差分方程式を構成する方法を提案した。(4) 交通流モデルとして知られる最適速度モデルの離散化、超離散化に成功した。

交付額

(金額単位：円)

| | 直接経費 | 間接経費 | 合計 |
|--------|-----------|---------|-----------|
| 2006年度 | 1,000,000 | 0 | 1,000,000 |
| 2007年度 | 900,000 | 270,000 | 1,170,000 |
| 2008年度 | 800,000 | 240,000 | 1,040,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総計 | 2,700,000 | 510,000 | 3,210,000 |

研究分野：可積分系、超離散系、ソリトン系、非線形波動

科研費の分科・細目：応用物理学・工学基礎 工学基礎

キーワード：可積分系、離散可積分系、超離散、離散力学系、差分方程式、交通流、セルオートマトン、最適速度モデル

1. 研究開始当初の背景

非線形な離散モデルは、近年のコンピュータの処理能力の増大にともなって、ますます注目を集めるようになってきている。なかでもセルオートマトンモデルは、すべての量が離散化されているというコンピュータへの親和性から、計算機科学、流体力学、統計物理、複雑系や人工生命などの幅広い分野に応用されている。

一方、非線形波動現象を記述するモデルとして研究されてきたソリトンは、その数理構

造が明らかにされており、理学、工学分野において強力な数理的なツールとして、広く用いられている。さらに、その離散モデルである離散可積分系の手法は、特異値分解アルゴリズム、数値積分法などの応用数理の分野にも有効であることが近年発見され、現在「応用可積分系」と呼ばれる一つの研究の流れを生み出しつつある。

そういった「応用可積分系」研究の流れの中で、研究代表者・分担者は共同研究者とともに、ソリトン方程式から可積分なセルオートマトンを導く超離散化と呼ばれる一般的

な手続きを提案した。これはソリトンとセルオートマトンを自然な極限操作で結びつけることに成功した画期的成果であり、この分野の研究者に大きな影響を与え、超離散系という一つの大きな研究の流れを生み出した。さらに、この手法は連続体モデルとセルオートマトンをいかに対応付けするかという未解決の問題への一つの回答にもなっており、「応用可積分系」の対象を変数がすべて離散なモデルであるセルオートマトンモデルにまで広げたと言うことができる。

セルオートマトンモデルの工学的応用を考える際には重要な系は、質量、粒子数を保存するセルオートマトンである。このような保存的セルオートマトン系の研究は、格子ガスモデルに始まるが、近年では交通流モデル、人の流れや生物の集団運動モデルにも応用されている。保存的セルオートマトン系の時間発展の記述には、粒子の運動方程式を考える Lagrange 表現と、流れの場を考える Euler 表現が存在するが、最近研究代表者は交通流セルオートマトンモデルとして知られる Burgers セルオートマトン(BCA)、そしてその拡張である福井・石橋モデルの Euler 表現と Lagrange 表現を対応づける Euler-Lagrange 変換を発見することに成功した。

しかしながら、連続モデルにおける Euler-Lagrange 対応、粒子に対する超離散化はその存在が期待されながら、まだ明らかになっていない。これらを明らかにすることはセルオートマトンや差分スキームによる流体、交通流等のシミュレーションに新たな観点を与える可能性があり、応用上の観点からも重要である。

2. 研究の目的

本研究では連続モデルにおける Euler-Lagrange 対応、粒子系に対する超離散化の手法を明らかにしていくことを目的とする。具体的には保存系、粒子系の中で、超離散化、Euler-Lagrange 対応の手法と相性が良い、交通流モデル、箱玉系、Calogero-Moser 系を対象にこれらを考察し、得られた結果を総合することによって統一的な理論の構築を目指すという手法を取る。個々の目標については以下のように設定する。

(1) 連続モデルにおける Euler-Lagrange 対応の解明

箱玉系は離散 KP 方程式から超離散化によって得られることが知られている。また Euler 表現と、ソーティングに由来する Lagrange 表現を対応づける変換を我々は最

近発見している。従って、連続モデルにおける Euler-Lagrange 対応を最も考えやすいモデルと言える。そこで番号付き、運搬車付きなどの拡張された箱玉系に対する Euler-Lagrange 対応などの一般的な構造を明らかにしたのちに、これらを逆超離散化することによって、連続モデルにおける Euler-Lagrange 対応を構成することを試みる。ここで得られた知見をもとに、他のモデルに対しても同様の試みをする。

(2) 粒子系に対する超離散化

一次元多体粒子系である Calogero-Moser 系は、可積分な微分方程式、差分方程式とも知られている系である。従って粒子系に対する超離散化を最も考えやすいモデルと言える。そこでこれに対する超離散化を構成することを試みる。また交通流モデルも比較的粒子系としては扱い易いのでこれに対しても同様の試みをする。またこれらの結果の副産物として可積分性を保つ差分スキームが得られる可能性があるため、研究の進展状況によっては数値積分法としての性能評価も試みる。

(3) 工学的応用

上記に目標がある程度達成されたのち、統一的な理論を構築を目指す。その統一的な理論を用いて、超離散化法による格子ガスの速度ベクトルの自然の離散化や、連続モデルに対する Euler-Lagrange 変換を通じての保存系に対する数値スキームの構成なども視野に入れる。また箱玉系はソーティングや組合せ論との関連が指摘されているので、アルゴリズムへの応用も関係してくる可能性があり、研究の進展状況によってはそれらへの展開も検討する。

3. 研究の方法

本研究においては、研究代表者・分担者が共同研究者とともに開発した超離散化の手法が中心的役割を果たす。超離散化の手法は可積分系であるソリトン方程式とセルオートマトンを結びつける研究の中から生まれていたものであるが、手法自体は可積分系の構造に依存していない。また、ソリトン方程式は無限自由度を持つ偏微分方程式系であったが、有限自由度の系にも適用することが可能である。そこで、保存的セルオートマトンやその粒子系を研究すると同時に、それから得られる有限自由度の可積分な差分方程式も研究する方針で研究を遂行した。具体的には以下の通りである。

(1) 離散ソリトン系を有限自由度に還元することによって得られる Quispel-Roberts-Thompson (QRT)系を可積分性を保ったまま拡張する。また、非可積分系への拡張を考える。さらにそれらの超離散化を試みる。

(2) これまでに得られている、交通流モデルにおける超離散化や Euler-Lagrange 対応に関する成果をもとに、粒子系に対する超離散化可能なモデルを構築する。

(2)は本研究課題の申請時の構想していたテーマそのものであるが、(1)は(2)に伴う有限自由度の系の研究の必要性の認識により、重要なテーマとして徐々に研究の比重が高まってきたものである。

以上に方針に基づき、研究の初期においては、発見法的にモデルを構築し、数式処理と数値計算により、可積分性判定テストや交通流モデルの基本図によって、モデルに数理的構造を発見することを試みた。モデルの数理的構造が数値的に確認されたのちは、理論的な解析を行うというスタイルを取った。研究は研究代表者・分担者が電子メールによって情報交換を行いながら、研究を進めていくといった。

4. 研究成果

(1) 2つの保存量を持つある種の3階の可積分な差分方程式が、お互いに相異なる2階の可積分な差分方程式から構成されているということがわかった。今まで3階可積分な差分方程式については、その構造が未知な点多かったため、これは大きな一歩である。またこの差分方程式は超離散化可能であり、セルオートマトンへの応用が期待できる。この結果は論文 "Third-order integrable difference equations generated by a pair of second-order equations" にまとめられている。

(2) ある種の QRT 系を拡張した非可積分な系がアトラクタを持ちながらも超離散化可能であることを発見した。これは今までにない結果であり、超離散化法の非可積分系への今後の展開が期待される。またセルオートマトンへの応用も同様に期待できる。この結果は論文 "Discrete mappings with an explicit discrete Lyapunov function related to integrable mappings" にまとめられている。

(3) 2階の可積分な差分方程式の多くは QRT

系に属するということが知られているが、QRT 系よりも高次の保存量を持つ差分方程式の存在が知られている。これらの方程式は散発的に発見されていたが、QRT 系から高次の保存量を持つ2階の差分方程式を構成する一般的な方法を提案した。これにより複雑な周期運動を起こす差分方程式が構築でき、このダイナミクスを超離散系、セルオートマトン、交通流モデルに拡張できる可能性が生まれてきた。まだ萌芽的な段階であるが、研究は継続中であり、今後の発展が期待できる。成果は、論文 "Constructing two-dimensional integrable mappings that possess invariants of high degree" にまとめられている。

(4) 交通流モデルの中で、最適速度モデルと呼ばれる微分方程式のモデルがある。これは応用面からも非常に重要なモデルとしてよく知られている。このモデルの時間離散化、超離散化を試み、その構築に成功した。さらに超離散化したモデルが、交通流セルオートマトンモデルとしてよく知られている福井・石橋モデルを含んでいることもわかった。この結果は論文 "On a discrete optimal velocity model and its continuous and ultradiscrete relatives" にまとめられている。このモデルの超離散化により保存的セルオートマトンが得られたということは、この分野の研究において、非常に大きな成果と言える。Euler 表現も含めて、このモデルの Euler-Lagrange 対応を明らかにすることが、今後の重要な研究課題となると思われる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計5件)

Constructing two-dimensional integrable mappings that possess invariants of high degree, Hironori Tanaka, Junta Matsukidaira, Atsushi Nobe and Teruhisa Tsuda, to appear in RIMS Kokyuroku Bessatsu(2009), 査読有

On a discrete optimal velocity model and its continuous and ultradiscrete relatives, Daisuke Takahashi and Junta Matsukidaira, JSIAM Lettes Vol.1, p1-4(2009), 査読有
http://www.jstage.jst.go.jp/article/jSIAM/1/0/1_1/article

2 階可積分差分方程式から生成される高階可積分差分方程式について, 長井秀友, 高橋大輔, 松木平淳太, 日本応用数理学会論文誌 Vol.16, No.3 p197-210(2006), 査読有

<http://ci.nii.ac.jp/Detail/detail.do?LOCALID=ART0007920586&lang=ja>

Discrete mappings with an explicit discrete Lyapunov function related to integrable mappings, H. Inoue, D. Takahashi and J. Matsukidaira, Physica D Vol.217, p22-30(2006), 査読有

Third-order integrable difference equations generated by a pair of second-order equations, J. Matsukidaira and D. Takahashi, J. Phys. A. Vol 39, p1151-1161(2006), 査読有

[学会発表](計7件)

田中宏典, 松木平淳太, 野邊厚, 津田照久, QRT 系から生成される高次元保存量を持つ2階差分方程式, 日本応用数理学会研究部会連合発表会, 2009年3月8日, 京都大学

田中宏典, 松木平淳太, QRT 型差分方程式の拡張について, 日本応用数理学会年会, 2008年9月18日, 東京大学柏キャンパス

松木平 淳太, QRT 系のある拡張について, 可積分数理の拡がり, 2008年8月12日, 京都大学数理解析研究所

Junta Matsukidaira, A stochastic traffic cellular automaton model with higher velocity, Nonlinear Waves--Theory and Applications, 2008年6月10日, 清華大学

Junta Matsukidaira, A stochastic traffic cellular automaton model with higher velocity, The 7th AIMS Conference on Dynamical Systems and Differential Equations, 2008年5月18日, University of Texas at Arlington

Junta Matsukidaira, Recent Developent of the Study of Discrete and Ultradiscrete Integrable Systems, Mini Minisymposium " Integrable Discrete and Ultra-discrete Systems and Their Applications " in the SIAM Conference on Nonlinear Waves and Coherent Structures, 2006年9月9日, University of Washington

Junta Matsukidaira and Daisuke Takahashi, Third-order integrable difference equations generated by a pair of second-order equations, Symmetries and Integrability of Difference Equations (SIDE) VII, 2006年7月10日, The University of Melbourne

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松木平 淳太 (MATSUKIDAIRA JUNTA)

龍谷大学・理工学部・教授

研究者番号: 60231594

(2) 研究分担者

高橋 大輔 (TAKAHASHI DAISUKE)

早稲田大学・理工学術院・教授

研究者番号: 50188025