

平成21年 5月 28日現在

研究種目: 若手研究 (A)
研究期間: 2006 ~ 2008
課題番号: 18684001
研究課題名(和文) ラグランジアンファイブレーションの構造
研究課題名(英文) On the structures of Lagrangian fibrations
研究代表者
松下 大介 (MATSUSHITA DAISUKE)
北海道大学・大学院理学研究院・准教授
研究者番号 90333591

研究成果の概要:

シンプレクティック多様体に入るラグランジアンファイブレーションについて、特異ファイバーの構造を決定した。またラグランジアンファイブレーションを保ったまま変形出来るシンプレクティック多様体があるモジュライ空間の中で余次元1の族をなすことを示した。さらにシンプレクティック多様体の双有理的な特質の一つを見出した。

交付額

(金額単位:円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,300,000	390,000	1,690,000
2007年度	1,400,000	420,000	1,820,000
2008年度	2,600,000	780,000	3,380,000
年度			
年度			
総計	5,300,000	1,590,000	6,890,000

研究分野: 数学

科研費の分科・細目: 代数学

キーワード: シンプレクティック、ラグランジアン

1. 研究開始当初の背景

代数的なシンプレクティック多様体は一般のシンプレクティック多様体と同じく、シンプレクティック

形式を持つ多様体ではあるが、多様体も、そしてその上のシンプレクティック形式も代数的であることが異なる。このような多様体は Abel

多様体、Calabi-Yau 多様体とともに局所的に平坦な代数多様体の「原子」の役割を果たす。三者のうち Abel 多様体は19世紀から、Calabi-Yau 多様体も 1990 年代後半から盛んに研究されるようになったが、シンプレクティック多様体はその具体例があまり知られていないこともあって、2000 年まであまり研究されてこなかった。代数多様体の構造を調べる際、より次元の低い多様体への写像があったとすると、元の多様体を像の多様体のファイバー束のように見ることが出来、それを利用して種々の不変量を計算する手段がある。そこでシンプレクティック多様体から低い次元への写像にどんなものがあるか、という問題が考えられる。当研究課題開始時点で、このような写像は存在するのであれば、ラグランジアンファイブレーションと呼ばれる写像に限ることがわかっていた。そこで、よりラグランジアンファイブレーションのより詳しい構造を知ることが求められていた。

2. 研究の目的

既約シンプレクティック多様体というシンプレクティック多様体のクラスを設定し、その多様体に関して、次の点を明らかにすることが目標であった。

1. いつ既約シンプレクティック多様体はラグランジアンファイブレーションを持つか？
2. ラグランジアンファイブレーションの特異ファイバーや底空間はどのような構造を持つか？

なお、このクラスの多様体のうち、最も単純なものとして、K3 曲面と呼ばれるクラスがあるが、このクラスについては上記問題は完全に解かれており、高次元の場合にはどのような類似性が見られるか、を追求することも目標の一つであった。

3. 研究の方法

コンピューターで支援計算をしつつ、研究成果がまとまったところで、国内外の研究集会もしくはセミナーで発表し、それを元にして議論をすること、また同時に国内外の研究集会で関連のありそうなものに参加し、講演を元にして議論をする、という二つの手段を中心に研究を行った。

4. 研究成果

主だった研究成果は三つにまとめられる。

1. 特異ファイバーの構造
2. 双有理変換の列の有限性
3. ラグランジアンファイブレーションの変形

以下、各項目について述べる。1. については、ラグランジアンファイブレーションの特異ファイバーのうち、もっとも退化がおだやかなものを完全に分類した。K3 曲面の場合には小平により、1960 年代に完全な分類が行われ、小平特異ファイバーと呼ばれていた。研究の結果これらは小平特異ファイバーを自然に高次元化したもの、もう少し詳しく述べると、小平特異ファイバーと abel 多様体の直積に非常に近いものであることがわかった。一方、同時に楕円ファイバーと異なり、様々な重複度を持つこともわかった。応用として、小平による標準公式と呼ばれる式の高次元版を得た。今後はこの分類を元にして、ラグランジアンファイブレーションの導来圏の構造の研究などに応用が見込まれる。次に 2. について述べる。高次元代数多様体の特徴として、ほとんど同型であるが、余次元2の小さい部分のみが異なる、という多様体のペアを考えることがよくある。シンプレクティック多様体でこのようなペアは flop と呼ばれる双有理変

換を有限回繰り返すことで互いに写り合うと予想されていた。この予想は flop の列

$$X_1 \rightarrow X_2 \rightarrow \cdots \rightarrow X_n \rightarrow$$

は必ず有限回で停止することが示せばしたがうが、これを X_i たちが非特異である場合に示した。この結果からシンプレクティック多様体の様々な双有理幾何的性質を導くことが出来ると期待している。最後に 3. について。シンプレクティック多様体がラグランジアンファイブレーションを持つとき、その構造を保ったまま変形出来るかどうか、という問題を考える。これまでに知られている具体例ではシンプレクティック多様体の変形のほとんどの方向にラグランジアンファイブレーションを保ったまま変形出来ることがわかってきた。より具体的に言えば、シンプレクティックの倉西空間に非特異な超平面があり、その超平面にそった変形は、ラグランジアンファイブレーションを保つ、ということが知られていた。それを、すべてのシンプレクティック多様体で同様のことが成立する、という形に拡張することが出来た。応用として、ラグランジアンファイブレーションの構造を調べる場合、変形してより単純なものを考察する、といった手法が使えることになり、今後の応用が見込まれる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計 1 件)

1. Matsushita, D. On nef reductions of projective irreducible symplectic manifolds, Math. Z. vol. 258, no. 2, (2008), 267-270. 査読あり

[学会発表](計 12 件)

1. Matsushita, D. On Lagrangian fibrations, 第四回代数・解析・幾何セミ

ナー, 鹿児島大学, 2009, Feb.19.

2. Matsushita, D. Toward deformations of Lagrangian fibrations on symplectic varieties, Algebraic Geometry in East Asia, Korean Institute for Advanced Study, Korea, 2008, Nov.13.
3. Matsushita, D. On deformations of Lagrangian fibrations, 代数幾何学シンポジウム, 城崎大会議館, 2008, Oct.21.
4. Matsushita, D. On deformations of Lagrangian fibrations, moduli 空間と双有理幾何学, 京都大学数理解析研究所, 2008, June.18.
5. Matsushita, D. Applications of flops on symplectic manifolds, Mathematics seminar, Korean Institute for Advanced Study, Korea, 2008, Mar. 25.
6. Matsushita, D. On symplectic resolution of an isolated singularity (2), Mathematics seminar, Korean Institute for Advanced Study, Korea, 2008. Mar. 12.
7. Matsushita, D. On symplectic resolution of an isolated singularity (1), Mathematics seminar, Korean Institute for Advanced Study, Korea, 2008. Mar.5.
8. Matsushita, D. On remarks of terminations of D-flops on symplectic manifolds, UK-Japan Winter School, University of Warwick, England, 2008, Jan. 10.
9. Matsushita, D. On singular fibres of Lagrangian fibrations, ベクトル束と高次元代数多様体, 京都大学数理解析研究所, 2007, July. 6.
10. Matsushita, D. On base point freeness, Seminar on algebraic geometry, Max-Planck-Institute, Germany, 2006, June. 7.
11. Matsushita, D. On existence conditions of Lagrangian fibrations, Workshop on holomorphic symplectic

varieties, Max-Plank-Institute,
Germany, 2006, May. 24.

12. Matsushita, D. On Lagrangian abelian subvariety of symplectic manifolds, 代数幾何ミニワークショップ, 東京大学, 2006. Apr. 11.

[その他]

1. D.Matsushita, A canonical bundle formula for projective Lagrangian fibrations, ArXiv: 0710.0122.
2. D.Matsushita, On deformation of Lagrangian fibrations, ArXiv : 0903.2098.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松下 大介

北海道大学・大学院理学研究院・准教授

90333591

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし