様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　６月　１日現在

研究種目：若手研究(B)
研究期間：2006～2008
課題番号：18710137
研究課題名（和文）　離散凸構造に着目した最適化法とその次世代型ＣＲＭへの適用

研究課題名（英文）　Discrete Convex Optimization and its Application to CRM

研究代表者
森口　聡子（MORIGUCHI SATOKO）
産業技術大学院大学・産業技術研究科・助教
研究者番号：60407351

研究成果の概要：
離散最適化問題は様々な応用分野で現れるが，最適解を効率的に求めることは多くの場合に困難であることが知られている．本研究では，市場の成熟化・ニーズの多様化により重要視されているマーケティング戦略のＣＲＭ（顧客関係管理）に適用すべく，離散凸構造をより精緻に解明した．離散凸最小化に対して，実用上高率的な連続緩和解法の実装と，その効率のよさを理論的に保証する近接定理の導出にも成功した．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	1100000	0	1100000
2007 年度	1100000	0	1100000
2008 年度	600000	180000	780000
年度			
年度			
総　計	2800000	180000	2980000

研究分野：複合新領域
科研費の分科・細目：社会・安全システム科学，社会システム工学・安全システム
キーワード：ＯＲ，アルゴリズム，数理工学，数理計画法

１．研究開始当初の背景

ＣＲＭ (Customer Relationship Management) とは，顧客情報を管理し，顧客の維持や関係強化を行い，派生需要・潜在需要を創出するマーケティング戦略で，市場の成熟化・ニーズの多様化により重要視され始めていた．一方，離散凸構造は，最適化の分野で注目されている概念で，マトロイド・劣モジュラ関数に関する研究の流れを汲み，1990 年代中頃より離散凸解析理論の枠組みにおいて盛んに研究がなされていた．
これまでもマーケティングに対する数理的モデルや最適化を用いたアプローチは研究されてきたが，基本的な最適化手法やＬＰが用いられることが多く，最適化分野の最新の成果は活用されていなかった．また，最適化の分野における離散凸解析理論は，工学や数理経済学・ゲーム理論等，様々な方面への応用展開がなされてきた．ただし，マーケティングやＣＲＭへの応用はまだ成されていなかった．このような背景を踏まえ，本研究課題の申請時における動機は，本研究により離散凸構造に着目した新最適化技法の開発により，その応用の新たな方向性を導きたい

ということであった．

２．研究の目的

本研究では，ＣＲＭにおいて顕在する課題・新しい要求を解決する次世代型ＣＲＭを達成するために，これまでにない数理的手法・アルゴリズムを開拓していくこと，さらに，開発手法の有用性を実証していくことを目的とした．そのための理論的コアとして，離散凸最適化理論を取り上げ，新たな離散凸構造の究明と，新しい効率的な離散凸最適化アルゴリズムの開発・実装を達成することも目的とした．

３．研究の方法

（１）実問題の調査により，混合整数非線形計画問題を効率的に解かなくてはならないという課題をまずは抽出した．混合整数非線形計画問題を効率的に解くという目標のため，離散非線形計画の理論コアとして，離散凸解析を採用し，離散凸解析の分野の既存結果を，混合整数の状況に拡張することから取り組んだ．

（２）理論的な計算量だけでなく，実用上高速に解をもたらすという要求を最優先させるため，離散凸最適化問題に対して，連続緩和によるアプローチを採用した．まずは，連続緩和アプローチの実現性を計るため，理論計算量にとらわれることなく暫定的なアルゴリズムを構築し，計算機で実装することから取り組んだ．計算機実験の結果から得られたデータをもとに，アルゴリズムの改良を行い，さらにその効率の良さの指標に予想をたて，理論的に効率の良さを保障する近接定理を証明した．

（３）離散凸性をもつ問題に対して明らかになった事実を，さらに一般的な状況に拡張できないか，研究を進めた．拡張の方向性としては，離散L$^\natural$凸関数から離散準L$^\natural$凸関数への拡張を採用した．

４．研究成果

（１）現状のＣＲＭにおいて顕在する課題・新しい要求の調査を行った結果，扱わなくてはならないデータの量・種類が膨大であることが挙げられた．これの課題を解決する次世代型ＣＲＭを達成するために必要な数理的手法・離散凸アルゴリズムの研究を行った．扱うデータの種類が膨大で，離散変数で表されるものと連続変数で表されるものが混在するため，混合整数非線形計画問題を効率的に解く必要があった．一般に，混合整数（非線形）計画問題は解くことが非常に困難であることが知られている．そこで，連続/離散ハイブリッ凸関数に対する詳細な考察を行った．

まず，離散凸解析において提案されているM凸性に基づき，ハイブリッドM凸性を導入し，整多面体的ハイブリッドM凸関数に対する最小性規準を与えた．さらに，Ｌ凸関数に比べて，M凸関数におけるハイブリッド凸性には数学的により精細な議論を必要とし，理論的扱いが困難な状況にあることを指摘した．実用上は，導出した最小性規準を用い，明らかになった困難さを回避することで，離散凸性を有する特定のクラスについて，効率的な最小化アルゴリズムが構築できることを示した．効率的に解くことが非常に困難である混合整数非線形計画問題を効率的に解くための手がかりを与えることができた．今後の展望として，この結果を広く混合整数非線形計画に適用していくことが考えられる．なお，この結果は，雑誌論文②に公開した．国内学会発表も行った．

（２）様々な問題を解く上での基礎となり，（１）で述べた混合整数非線形計画問題，連続/離散ハイブリッ凸関数最小化でも必要となる離散凸最小化アルゴリズムを開発に取り組んだ．ここでは，実用上高速である，ということを最優先の要求事項としてとりあげて研究した．

①離散L$^\natural$凸関数は，整数格子点上で定義された関数のクラスとして提案された概念であり，離散凸解析理論において中心的な役割を担っている．離散L$^\natural$凸関数の最小化問題に対して，理論的に効率の良い多項式時間アルゴリズムが既に提案されている．

本研究では，実装上，高速に最小解を求めることを目的とし，離散L$^\natural$凸関数に対する連続緩和を用いた最小化法を提案した．

また，連続緩和解と離散最小解の近接性に関する定理を示した．

②ベクトル $x,\ y \in \mathbf{Z}^n$ に対して，成分ごとに最大値，最小値をとって得られるベクトルを $x \vee y,\ x \wedge y$ と書くことにし，$\mathbf{1} = (1, 1, \ldots, 1) \in \mathbf{Z}^n$ とする．

関数 $f : \mathbf{Z}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が次の並進劣モジュラ性(SBF$^\natural$) を満たしているとき，離散L$^\natural$凸関数であるという．

(SBF$^\natural$)

$$f(x)+f(y) \geq f((x-\alpha\mathbf{1}) \vee y) + f(x \wedge (y+\alpha\mathbf{1}))$$
$$(\forall x,\ y \in \mathbf{Z}^n,\ 0 \leq \forall \alpha \in \mathbf{Z}).$$

関数 $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R} \cup \{+\infty\}$ が$\forall x,\ y \in \mathbf{R}^n$, $0 \leq \forall \alpha \in \mathbf{R}^n$ に対して(SBF$^\natural$) を満たしてい

るとき，連続L♮凸関数であるという．ここで不等式(SBF♮) は $f(x)$ か $f(y)$ が$+\infty$であるとき成立していると約束する．

③離散L♮凸関数に対して，

$f(x) = \bar{f}(x)$ $(\forall x \in \mathbb{Z}^n)$

を満たす連続凸関数 $\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ が与えられていると仮定する．一般に， L凸関数の凸拡張可能性より，$\bar{f}$ の存在性は示せるが，必ずしも容易に見つけることができるとは限らない．しかし，離散凸関数を実装する際には，連続関数に対して，定義域を離散点のみに限定することで離散関数 f が定義されている場合が実際多くあり，こうした時には $\bar{f}$ が手に入る．
連続最適化の手法により $\bar{f}$ の最小解 $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$ を求め，これを連続緩和解とする．$\bar{x}$ の各成分に対して整数丸めを行って得られるベクトルを，最急降下法の初期点として採用する．連続緩和解と最小解の距離が近ければ，この方法が高速に動作することが期待できる．
次に本研究で導出した，連続緩和解と最小解の近接性に関する定理を示す．

定理 1.
$f : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を離散L♮凸関数，$\bar{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ を連続L♮凸関数とし，

$f(x) = \bar{f}(x)$ $(\forall x \in \mathbb{Z}^n)$

が成り立っているとする．このとき，任意の連続緩和解 $\bar{x} \in \arg\min \bar{f}$ に対して，

$\bar{x} - n\mathbf{1} < x^* < \bar{x} + n\mathbf{1}$

を満たす最適解 $x^* \in \arg\min f$ が存在する．

数値実験により，連続緩和解からの最急降下法によって，効率的にL♮凸関数の最小化が行えることを確かめた．図 1 にL♮凸関数最小化の実行時間を示す．

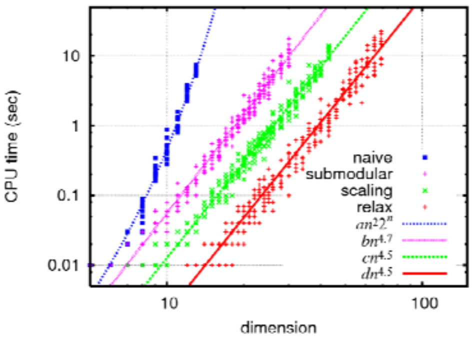

図１　離散L♮凸関数最小化の計算時間

なお，計算環境は，HP dx5150 SF/CT, AMD Athlon64 3200+ processor (2.0GHz, 512KB L2 cache), Vine Linux 4.1 (i386), gcc 3.3.6 である．
図１の結果は，近傍探索に近傍の全列挙を用いた最急降下法(naive)，近傍探索に劣モジュラ関数最小化を用いた最急降下法(submodular)，スケーリング法(scaling) に比べて，連続緩和解からの最急降下法(relax) が高速に最小解を求めたことを示している．
なお，この結果は，雑誌論文①に公開した．査読付国際会議を含む国内外の学会発表も行った．
また，L♮凸関数のついての結果をM♮凸関数へ適用することにも取り組んだ．この適用は自明ではなく，スケーリング操作に閉じていないというM凸性ならではの離散構造により，更なる精緻な数学的議論を必要としている．

（３）これまでに述べた関数のクラスに比べ，より一般的なクラスで，最小化が非常に困難な離散準凸関数に対しても，（２）に掲載した連続緩和アプローチを拡張した．まずは離散準L♮凸関数に取り組んだ．このクラスに対しても近接定理の導出には成功したが，離散準L♮凸関数では，離散L♮凸関数において有効利用できた劣モジュラ性の有する良い性質を利用できないため，予想通り近傍チェックに時間がかかってしまう．今後の展望としては，近傍探索の効率化を図っていくことで更なる高速なアルゴリズムを開発していくことが挙げられる．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① Satoko MORIGUCHI and Nobuyuki TSUCHIMURA, "Discrete L-Convex Functions Minimization Based on Continuous Relaxation," Pacific Journal of Optimization, (2009), to appear. 査読有.

② 森口聡子， 原辰次， 室田一雄， "連続/離散ハイブリッドM♮凸関数に関する一考察，" システム制御情報学会論文誌， Vol. 20-2 (2007)， 84-86. 査読有.

〔学会発表〕（計９件）

① 森口聡子， "離散凸解析とその応用，" 日本オペレーションズ・リサーチ学会 2009 年春季研究発表会， 筑波大学， 2009 年 3 月 17， 18 日.

② Satoko MORIGUCHI and Nobuyuki TSUCHIMURA, "Minimization of a Discrete Quasi L-convex Function Based on Continuous Relaxation," The 4th Sino-Japanese Optimization Meeting (SJOM2008), National Cheng-Kung University, Tainan, Taiwan, during August 27-31, 2008.

③ Satoko MORIGUCHI and Nobuyuki TSUCHIMURA, "Discrete Convex Functions Minimization Based on Continuous Relaxation," Ninth International Conference Approximation and Optimization in the Caribbean - APPOPT'2008, San Andres, Colombia, during March 2-7, 2008.

６．研究組織

(1)研究代表者

森口　聡子 (MORIGUCHI SATOKO)

産業技術大学院大学・産業技術研究科・助教

研究者番号：60407351

(2)研究分担者

(　　)

研究者番号：

(3)連携研究者

(　　)

研究者番号：