様式Ｃ-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年 4 月 14 日現在

研究種目：　若手研究（Ｂ）
研究期間：　２００６年度　～　２００８年度
課題番号：　１８７４０００２
研究課題名（和文）　対数的ｐ進解析による数論的多様体の相対的リジッドコホモロジー及びホモトピーの研究
研究課題名（英文）　Study on relative rigid cohomologies and homotopies of arithmetic varieties via logarithmic p-adic analysis

研究代表者
志甫　淳（SHIHO ATSUSHI）
東京大学・大学院数理科学研究科・准教授
研究者番号　３０２９２２０４

研究成果の概要：標数ｐ＞０の完全体上の代数多様体の射の相対的リジッドコホモロジーの有限性，過収束性を適当な仮定の下で証明した．過収束アイソクリスタルの対数的延長理論を適当な仮定の下で証明した．また，標数ｐ＞０の正則優秀スキームの対数的ホッジ・ヴィットコホモロジーに対する純性定理およびガーステン型予想を証明した．更に相対的対数的クリスタルコホモロジーの重み篩の理論を構築した．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	900,000	0	900,000
２００７年度	800,000	0	800,000
２００８年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	2,500,000	240,000	2,740,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：クリスタル，リジッドコホモロジー，過収束性，対数的代数多様体，ｐ進解析，対数的延長，クリスタルコホモロジー，重み篩

１．研究開始当初の背景

標数ｐ＞０の体上の代数多様体の有限性を持つべき良いｐ進コホモロジー理論の候補として，リジッドコホモロジーの概念が Berthelot により導入され，係数が自明の場合にその有限性が示された．そして本研究者の対数的ｐ進解析を用いた研究により，ある予想(過収束クリスタルの半安定予想)の下でリジッドコホモロジーの有限性が示された．その後，リジッドコホモロジーの有限性が Kedlaya により証明され，リジッドコホモロジーの性質も明らかになってきた．

しかしながら，コホモロジーとは，より理想的には相対的な状況で扱うべきものである：つまり標数ｐ＞０の体上の代数多様体の射 f:X→Yが与えられたときに，ｆに対して相対的なよいｐ進コホモロジー理論が存在するべきである．上記の状況において，X上の過収束アイソクリスタルＥを係数とするｆの相対的リジッドコホモロジーの概念は Berthelot 及び Chiarellotto-都築により定義され，また，ｆが固有かつ平滑なときには相対的リジッドコホモロジーが自然にＹ上の過収束アイソクリスタルの構造を持つこと(有限性，過収束性)が Berthelot により予想されていた．しかし，Berthelot のこの予

想については，ｆが持上げ可能な場合の Berthelot 及び都築の結果があるのみであった.

また，以前から続けていた対数的ホッジ・ヴィットコホモロジーの研究，そして相対的対数的クリスタルコホモロジーの重み篩の研究(後半は東京電機大の中島幸喜氏との共同研究)がまだ完成に至っていなかった.

２．研究の目的

まず，標数ｐ＞０の体上の代数多様体の射 f: Ｘ→ＹとＸ上の過収束アイソクリスタルＥに対して定義される相対的リジッドコホモロジーの有限性，過収束性を解明することを目的とした．具体的には有限性，過収束性をある場合に証明すること，そして一般の場合の有限性，過収束性に関する結果を導くべき予想(相対的な半安定予想)を定式化することを目標とした.

また，過収束アイソクリスタル自体の性質を調べることも研究目的とした．具体的には過収束アイソクリスタルに関する降下理論，過収束アイソクリスタルの延長可能性の研究を目標とした.

更に，リジッドコホモロジーのホモトピー版であるリジッド有理ホモトピーの研究も目的とした.

最後に，継続中であった対数的ホッジ・ヴィットコホモロジーの研究，そして相対的対数的クリスタルコホモロジーの重み篩の研究に関する論文の完成，出版を目標とした.

３．研究の方法

相対的リジッドコホモロジーの有限性，過収束性の研究に関しては，まず絶対的なリジッドコホモロジーの有限性に関する本研究者の以前の研究の再検討から始め，その証明の相対化を試みた．その結果，射が固有，平滑で良い対数的コンパクト化を持ち，かつ係数が対数的延長を持つ場合には相対的リジッドコホモロジーの有限性，過収束性が成り立つということを証明した．証明の鍵は種々の相対的対数ｐ進コホモロジーの導入とそれらの比較定理の証明である．次に，射が固有，平滑で良い対数的コンパクト化を持つが係数が対数的延長を持つとは限らない場合を研究した．長い時間をかけた思索の結果，「半径付」の相対的対数ｐ進コホモロジーを導入して比較定理を証明することにより，この場合にも有限性，過収束性が証明できることがわかった．更に，射が固有，平滑であるという条件のみで同様の問題を考えた．やはり長い時間をかけた思索，多くの文献の検討を積み重ねた結果，de Jong の理論を用いた超被覆の構成，都築のコホモロジー的降下理論，都築の基底変換定理，Kedlaya による過収束アイソクリスタルの貼り合わせの議論を複雑に組み合わせた技法を開発し，相対的リジッドコホモロジーの有限性，過収束性がある意味で成り立つことを若干の仮定の下で証明することができた．この過程において，過収束アイソクリスタルに関する従来知られていなかった降下理論を証明して利用した．また，更なる研究の結果，過収束クリスタルの半安定予想を仮定すれば，射が固有，平滑とは限らないときにも有限性，過収束性が generic には成り立つということの証明ができた．以上の研究の進展における各段階で，それまでの結果を国内外での研究集会やセミナーで発表し，関連する研究者と討論を行った.

また，過収束アイソクリスタルの対数的延長に関して，まず標数０の場合の古典的結果とその証明方法を Deligne や Andre，Baldassarri の本などにより詳しく調べた．また，Kedlaya による冪単モノドロミーの場合の対数的延長定理の証明を詳細に検討して，その一般化を試みた．長い試行錯誤の結果，Kedlaya の方法のままではなく，適切な変更を施した上で議論すれば，冪単モノドロミーとは限らない場合でも，適当な条件下で過収束アイソクリスタルの延長可能性が成り立つことが証明できた．この結果に関しても国内での研究集会で発表を行った.

また，以前から続けていた対数的ホッジ・ヴィットコホモロジーの研究に関しては，Bloch-Ogus 複体と加藤複体の比較が重要で，複体を構成する写像の符号の差を正確に決定することが課題であった. Hartshorne の著書における符号が違っていることを指摘した Conrad の本や，Jannsen-Saito-Sato の最近のプレプリントを参考にし，国内の研究者との議論により考察を深めた結果，正確な符号の差を法ｐで考えた場合には決定でき，それを用いて純性定理およびｐ加藤複体のガーステン型予想の証明に成功した．それを論文の形にまとめ投稿した．査読に大変時間がかかったが，出版にこぎ着けた.

最後に，相対的対数的クリスタルコホモロジーの重み篩の研究については，長大な論文原稿を適切にまとめ，細かな議論の誤りを修正して完全に完成させることが課題であった．共同研究者である東京電機大の中島幸喜氏との直接あるいはメールによる間接の議論を重ね，最終原稿を完成させ，提出した．これも査読に非常に時間がかかったが，最終的には本として出版されるに至った.

研究全体としては，図書の購入およびインターネットの活用による資料の入手・その詳細な検討，国内外への出張による研究発表や他の研究者との研究討論および資料収集(大学院生に依頼することもあった)が研究の進展に大きく貢献した．途中でコンピューターを購入したが，これは文献検索，メールでの

やりとり，論文作成などに非常に役立った．

４．研究成果

(1) まず，標数ｐ＞０の完全体上の代数多様体の射ｆ：Ｘ→Ｙが固有かつ平滑な場合，過収束アイソクリスタルＥを係数とするｆの相対的リジッドコホモロジーがある意味で自然に過収束アイソクリスタルの構造を持つこと(有限性，過収束性)を，Ｙが平滑であるかまたはＥがフロベニウス構造を持つときに証明した．これは Berthelot による予想のあるヴァージョンの解決である．また，ｆが固有や平滑とは限らない場合でも，Ｅがフロベニウス構造を持つときにはＹの稠密なある開集合上で同様の構造を持つことを示した．証明の過程において，過収束アイソクリスタルの降下理論を一部拡張し，また半径付相対対数的収束コホモロジー，半径付相対対数的リジッドコホモロジー等の新たなｐ進コホモロジーを定義し，その基本的性質および比較定理を示した．Berthelot の予想はこれまで本質的には持ち上げ可能な場合にしか知られていなかったので，この結果は国内外に大きな影響を与えた結果であると思われる．同様の研究を数論的Ｄ加群の立場から考察する研究が Caro-都築によりなされたが，両者の理論を結び付けることが今後の大きな課題の一つであると思われる．また，下記(2)の研究とも関連するが，Ｅがフロベニウス構造を持たない場合でも，ある種のｐ進非リュービル性の仮定のもとでこれまでの結果を一般化することが期待されるので，フロベニウス構造を持たない係数の場合へと理論を拡張することも今後期待される研究方向である．

(2) 過収束アイソクリスタルの延長可能性に関して次の結果を得た：標数ｐの平滑な良いコンパクト化をもつ代数多様体Ｘとｐ進整数環の部分集合Σに対してＸ上のΣ冪単モノドロミーを持つ過収束アイソクリスタルという概念を定義し，Σが適当なｐ進非リュービル性を持つときには，それがＸのコンパクト化へと対数的でかつ指数がΣに入るように一意的に延長されることを証明した．これは冪単モノドロミーを持つ場合の Kedlaya の結果の一般化であり，また標数０の古典的な場合の確定特異点型の可積分接続の対数的延長の理論のｐ進版である．複雑なｐ進微分作用素の列の構成と様々なｐ進収束性の計算が証明の鍵となる．これも高次元多様体上のｐ進微分方程式の研究における興味深い結果であると思われる．今後はまず，標数０の古典的な場合の可積分接続に関する諸定理のｐ進版の更なる証明が課題となると思われる．また，過収束アイソクリスタルの半安定還元予想を更に一般化して証明することも将来の課題となるであろう．

(3) 標数ｐの正則優秀スキームの対数的ホッジ・ヴィットコホモロジーに関する純性定理および加藤複体のｐ部分に関するガーステン型予想に関する論文を纏め，出版に漕ぎ着けた．Bloch-Ogus 複体と加藤複体の法ｐでの比較が重要であった．両複体を構成する写像の符号の差の計算に関して従来知られていた論文には議論の見落としがあったので，正則スキームに対する一般化された剰余複体の理論を用いて計算を行うことが鍵であった．これは細かい結果ではあるが，多くの人が見落としていたことに注意を与えたという意味で，意義のある結果であると思われる．正則スキームのヴィットスキームに対する一般化された剰余複体の理論あるいは双対性の理論がまだ欠けているように思うので，その研究が今後の課題であろう．

(4) 東京電機大の中島幸喜氏との共同研究で標数ｐの開多様体の平滑な族の相対的対数的クリスタルコホモロジーに対する重み篩，重みスペクトル系列に関する理論を構築し，著書にまとめた．クリスタルサイト又は制限クリスタルサイトの篩付導来圏の対象として重み篩を捉えることが鍵であった．これは Deligne による平滑な開多様体の Hodge 構造の理論のｐ進版であり，面白い研究であると思われる．相対的収束コホモロジーあるいは相対的リジッドコホモロジーを用いた解釈，あるいは相対的リジッドホモトピーへの応用などは今後の課題である．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　１件）

1. <u>A. Shiho</u>, On logarithmic Hodge-Witt cohomology of regular schemes, J. Math. Sci. Univ. Tokyo 14(2007), 567-635. 査読有.

〔学会発表〕（計　６件）

1. <u>A. Shiho</u>, On logarithmic extension of overconvergent isocrystals, p-adic method and its applications in arithmetic geometry at Sendai, 東北大学, 2008 年 11 月 7 日.
2. <u>A. Shiho</u>, On the overconvergence of relative rigid cohomology, p-adic differential equations: a conference in honor of Gilles Christol, Bressanone(イタリア), 2008 年 9 月 9 日.
3. <u>A. Shiho</u>, On the overconvergence of relative rigid cohomology, 代数的整数論とその周辺, 京大数理研, 2007 年 12 月 11 日.
4. <u>A. Shiho</u>, Relative log convergent cohomology and relative rigid cohomology,

p -adic aspects in arithmetic geometry, 玉原国際セミナーハウス, 2007年6月5日.

5. A. Shiho, Relative log convergent cohomology and relative rigid cohomology II, p -adic method and its applications in arithmetic geometry, 広島大学, 2006年11月25日.

6. A. Shiho, Relative log convergent cohomology and relative rigid cohomology, p -adic Arithmetic Geometry, 京大数理研, 2006年11月22日.

〔図書〕(計　1件)

1. Y. Nakkajima and A. Shiho: Weight filtrations on log crystalline cohomologies of families of open smooth varieties", Lecture Note in Mathematics 1959 (2008), Springer Verlag (266 pages).

６. 研究組織

(1)研究代表者

志甫　淳(SHIHO ATSUSHI)

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：３０２９２２０４

(2)研究分担者

なし.

(3)連携研究者

なし.