

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2006～2008

課題番号：18740006

研究課題名(和文) 虚数乘法をもつアーベル多様体のP進L関数

研究課題名(英文) p-adic L-functions of CM abelian varieties

研究代表者

小林 真一 (Kobayashi Shinichi)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・助教

研究者番号：80362226

研究成果の概要：慶応大学の坂内健一氏と共同で、CM 楕円曲線の Hecke L-関数の特殊値と直接結びつく Eisenstein-Kronecker 数の母関数が、その楕円曲線の Poincaré bundle に付随する基本的な theta 関数の Laurent 級数展開として得られることを示した。これを基礎として ordinary な素点における CM 楕円曲線の 2 変数 p-進 L-関数の簡明で筋道のよい構成法を与えると同時に、超特異点における 2 変数 p-進 L-関数を構成する障害となっている事実を発見した。またこれに関連して、超特異点などにおいて p 進 L-関数を構成する上で重要な役割を果たす p 進 Fourier 理論の整備を行った。これにより Amice などによる \mathbb{Z}_p 上の測度論を任意の局所体の整数環上にほぼ満足の行く形で一般化できた。

前述の Eisenstein-Kronecker 数と Poincaré bundle の関係などを基礎として、坂内健一氏と東京大学の辻雄氏と共同で虚数乘法をもつ楕円曲線の polylogarithm を明示的、代数的に構成する方法を与えた。これにより楕円 polylogarithm の p 進実現を計算することが可能となり、それが p 進 L-関数の特殊値と結びつくことを示した。その他、坂内健一氏と名古屋大学の古庄英和と共同でやはり前述の結果などを基礎として p 進の Eisenstein-Kronecker-Lerch 級数を定義して楕円 polylogarithm と結びつけた。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	900,000	0	900,000
2007年度	1,200,000	0	1,200,000
2008年度	1,300,000	390,000	1,690,000
総計	3,400,000	390,000	3,790,000

研究分野：整数論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：岩澤理論, p 進 L 関数, CM アーベル多様体, 数論幾何, ゼータ関数

1. 研究開始当初の背景

代数体上で定義されたモチーフに対して、そのモチーフの Selmer 群などの整数論的に重要な群と、そのモチーフのゼータ関数の特殊値

の間には、Beilinson 予想や Bloch-Kato の玉河数予想などの神秘的な関係が成り立つと予想されている。この関係の最も古典的な例は類数公式や Dirichlet の単数定理であり、

楕円曲線に関しては有名な Birch & Swinnerton-Dyer 予想などがある。これらの予想を解決する強力な手法として岩澤理論がある。岩澤理論自体は円分体のイデアル類群の研究から出発したが、その後、CM 楕円曲線、Modular な楕円曲線、一般の p 進表現やモチーフに対して一般化された。この理論においては岩澤主予想と呼ばれるものが中心課題となる。岩澤主予想は円分拡大などの Selmer 群とゼータ関数の特殊値を p 進的に補間する p 進 L 関数を結びつける重要なものであるが、解決されている場合はわずかである。主予想の難しさは、比べる 2 つの対象が、Selmer 群は数論的で Galois 表現やコホモロジカルな対象であるのに対し、ゼータ関数や p -進 L 関数は非常に解析的で、これら 2 つがまったく異なる世界に存在する対象であることに由来する。これら 2 つの異なる世界を行き来し、両者に関係を与えると考えられているものが Euler 系である。Euler 系は K 群やガロワコホモロジーなどの世界に住んでいると思われ、 p 進 Hodge 理論などを通して、 p 進 L 関数と結びつくと思われている。そして一旦、Euler 系が見つければ岩澤主予想の半分が証明できるような枠組みが整っている。したがって Euler 系の発見が重要な課題となるわけであるが、現在のところ、発見されている Euler 系は数少ない。現在発見されている Euler 系に関して言うと、Euler 系の形は p 進 L 関数の代数的構成と関連していると思われる。 p 進 L 関数の代数的側面や新しい構成方法を研究することで、Euler 系の構成問題に迫りたいというのが、この研究の背景と動機であった。

2. 研究の目的

Euler 系が発見されていないモチーフで、ゼータ関数や整数論的研究が進んでいる CM アーベル多様体の p -進 L 関数を研究することを目的とした。 p -進 L 関数自体は Katz によって存在がすでに知られていたが、その構成は解析的であり、Euler 系の構成問題と結びつくようなものではなかった。この研究では Theta 関数や polylogarithm など Euler 系と関係がありそうな関数を前面に出すことにより、 p 進 L 関数を再構成することが目的であった。CM アーベル多様体の最も基本的な場合である CM 楕円曲線に関しては、Euler 系も構成され、岩澤主予想も解決されているが、そこでの Euler 系の構成はアーベル多様体に一般化できるものではなかった。アーベル多様体には Theta 関数に関連した様々な深い結果が得られているが、そのような結果を応用するためにも、まずは CM 楕円曲線の既存の理論を Theta 関数などの一般論と結びつけて解釈することを当面の目標とした。

3. 研究の方法

polylogarithm に詳しい名古屋大学(2006 年に慶応大学に異動)の坂内健一氏や東京大学の辻雄氏、Coleman の p 進積分に詳しい名古屋大学の古庄英和氏らと共同研究する形で研究を進めた。とくに坂内氏とは、まず CM 楕円曲線の岩澤理論を一般の CM アーベル多様体に一般化できるように theta 関数を組織的に使う方法を開発、整備した。具体的には CM 楕円曲線の中で使われていた ad hoc な議論を排除し、一般のアーベル多様体で通用する手法に置き換えた。とくに Mumford の代数的 theta 関数の理論や Barsotti や Norman の p 進 theta 関数の理論を岩澤理論に応用する手法を開発整備した。そしてコンピュータ (Mathematica など) を使って、基本的な theta 関数の p 進的ふるまいの実験を行った。

とくに p が超特異と呼ばれる場合については、様々な関数の p 進的振る舞いが非常に微妙で扱いが難しいが、その場合のよい規則やよい取り扱いを発見するために、コンピュータによる数値実験を行った。また国外、国内の研究集会に参加することで、様々な研究者と接し有意義なコメントなどをいただいた。その他にも様々な研究者と研究連絡等でより集中的な議論も行った。

4. 研究成果

研究成果は下の (1)-(5) の preprint たちにまとめられている。(1)においては、CM 楕円曲線の複素解析的、 p 進解析的側面に関して、既存の理論を theta 関数の一般論と結びつけて解釈することを行った。主要結果は、CM 楕円曲線に伴う Hecke L -関数の特殊値と密接に結びつく Eisenstein-Kronecker 数の母関数が、その楕円曲線に関する Poincaré bundle に伴う基本的な被約 theta 関数の Laurent 展開になっていることを示した。またこの事実を基礎とし、Mumford の代数的 theta 関数の理論や Barsotti や Norman の p 進 theta 関数の理論を用いて CM 楕円曲線の岩澤理論を theta 関数論的に整備した。その結果として今まで知られていた ordinary な素点における Katz の 2 変数 p 進 L 関数の非常に簡明で筋道のよい構成を与えることに成功した。また超特異な素点においても CM 楕円曲線の 2 変数 p 進 L 関数の存在問題に関して、構成の障害となっている新しい事実を発見した。これは今まで超特異な素点の場合に 2 変数 p 進 L 関数がなぜ構成できていなかったかということにある種の答えを与えるものとして意義がある結果である。この問題はひきつづき (3) の論文やその続きであるまだ執筆途中の論文で考察する予定である。(2)の論文では、(1)での成果を使って p -進の elliptic polylogarithm を構成した。elliptic

polylogarithm 自体は Beilinson-Levin によって Motivic に構成されており, その real Hodge 実現は Eisenstein-Kronecker-Lerch 級数と結びつける形で計算されていた. これにより (複素の) ゼータ関数の特殊値と結びつけることができている. elliptic

Polylogarithm は 1 進実現では楕円単数とも結びつくことが知られており, Euler 系と関連する非常に重要なものである. そして p 進実現は p 進 L 関数と結びつくものであると期待されていたが, それは証明されていなかった. ひとつの理由は Beilinson-Levin の real Hodge 実現の計算が非常に実解析的なものであり, それをただちに p 進解析的なものにおきかえることができなかつたからである. P 進にするためにはより代数的でモチビクな計算手法を確立する必要があつた. (2) の論文では (1) による

Eisenstein-Kronecker-Lerch 級数の theta 関数的, 代数的取り扱いを基礎として, elliptic polylogarithm の実現をよりモチビクな方法で計算する手法を開発した. これにより今まで計算できなかつた p 進実現を計算することが可能となり, 期待されていたように p 進 L -関数と結びつくことを示すことができた. (4) では (2) をさらに発展させる形で, Eisenstein-Kronecker-Lerch 級数の特殊値の p 進化だけでなく, 級数自体を Coleman 関数などと関連させる形で p 進化することに成功し, この関数の一般的な値と elliptic polylogarithm の値を結びつけた.

(5) においては, この (4) の p 進 Eisenstein-Kronecker-Lerch 級数を使って, 有名な Kronecker の極限公式の p 進化を行った. その際に (2) や (4) で重要な役割を果たした distribution 関係式に注目することで, 古典的な Kronecker の極限公式の非常に簡明な別証明を与えることに成功した. またその証明を p 進化することで p 進の極限公式を得ることに成功した.

(1) K. Bannai, S. Kobayashi, Algebraic theta functions and p -adic interpolation of Eisenstein-Kronecker numbers, preprint, submitted.

(2) K. Bannai, S. Kobayashi, T. Tsuji, On the real Hodge and p -adic realizations of the elliptic polylogarithm for CM elliptic curves, preprint, submitted.

(3) K. Bannai, S. Kobayashi, Integral structures on p -adic Fourier theory, preprint, submitted.

(4) K. Bannai, S. Kobayashi, H. Furusho, p -adic Eisenstein-Kronecker functions and elliptic

polylogarithm for CM elliptic curves, preprint, submitted.

(5) K. Bannai, S. Kobayashi, The Kronecker limit formulas via the distribution relation, preprint, submitted.

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

(1) K. Bannai, S. Kobayashi, Algebraic theta functions and Eisenstein-Kronecker numbers, RIMS Kōkyūroku Bessatsu B4, 2007, 査読有り 63-78.

[学会発表] (計 7 件)

(1) S. KOBAYASHI, Integral structures on p -adic Fourier theory, 早稲田大学整数論研究集会, 2009. 3. 11.

(2) S. KOBAYASHI, p -adic L -functions at supersingular primes for CM elliptic curves, Arithmetic Geometry, NCBS, Bangalore, India, 2008. 3. 28

(3) K. BANNAL, 虚数乗法をもつ楕円曲線の p -進ポリログと 2 変数 p -進 L -関数, 代数的整数論とその周辺, RIMS, 京都大学, 2007. 12. 10

(4) S. KOBAYASHI, The two variable generating function of Hecke L -values of CM elliptic curves, POSTECH Number Theory Monthly Mini Workshop, 2007. 10. 27, Korea.

(5) S. KOBAYASHI, CM 楕円曲線の超特異点における 2 変数 p 進 L 関数, 代数コロキウム, 東京大学, 2007. 1. 31.

(6) S. KOBAYASHI, CM 楕円曲線の超特異点における 2 変数 p 進 L 関数, 早稲田大学整数論セミナー, 2007. 1. 26.

(7) S. KOBAYASHI, Algebraic theta functions and Eisenstein-Kronecker numbers, 代数的整数論とその周辺, RIMS, 京都大学, 2006. 12. 8

[その他]

<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~shinich>

i/

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小林 真一 (Kobayashi Shinichi)
名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・
助教
研究者番号：80362226