

平成21年 4月30日現在

研究種目：若手研究(B)
 研究期間：2006～2008
 課題番号：18740007
 研究課題名(和文) 整環の表現論
 研究課題名(英文) Representation theory of Orders
 研究代表者
 伊山 修(IYAMA OSAMU)
 名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
 研究者番号：70347532

研究成果の概要：

高次元 Auslander-Reiten 理論として n -クラスター傾部分圏を調べた。2007年の第12回多元環の表現論国際集会のワークショップでは3回の全体講演を行い、第一回 ICRA Award を受賞した。受賞題目は「Higher theory for almost split sequences and Auslander correspondence, and subsequent work on Calabi-Yau categories」。2008年度数学会年会では代数学賞を受賞した。受賞題目は「高次 Auslander-Reiten 理論の研究」。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,200,000	0	1,200,000
2007年度	1,100,000	0	1,100,000
2008年度	1,100,000	330,000	1,430,000
総計	3,400,000	330,000	3,730,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学、代数学

キーワード：高次元 Auslander-Reiten 理論、 n -クラスター傾部分圏、高次元 Auslander 多元環、変異、Cohen-Macaulay 加群、Calabi-Yau 三角圏、preprojective 多元環、クラスター多元環

1. 研究開始当初の背景

完備正則局所環 R 上の整環 (= R -代数のうち R -加群として有限生成射影的なもの) の表現論を研究する予定です。 R -整環 Λ の表現論とは、 Λ -格子 (= Cohen-Macaulay Λ -加群 = Λ -加群のうち R -加群として有限生成射影的なもの) の成す加法圏 $\text{CM}\Lambda$ を研究する事を意味します。それは quiver の表現を始めとする有限次多元環の表現論 (Gabriel, Drozd,

Ringel, Kac, Lusztig, ...) と、可換 Cohen-Macaulay 環の表現論 (Auslander, Herzog, Eisenbud, Artin, Greuel, ...) を統一的に含む枠組みと言えます。私は数論的観点からも興味深い、 R が 1 次元の場合を主に扱っていますが、それは Dedekind 環の ideal 論の非可換化であるとともに、有限群の整数表現の一般化でもあります。

2. 研究の目的

Auslander-Reiten 理論の基本定理は, CMA 上の関手圏において, 特定の有限個を除いた全ての単純関手の射影次元は 2 である, と述べる事が可能です. 面白い事に R が 2 次元の場合には, 全ての単純関手の射影次元が 2 となる事が分かりますが, これは上で述べた, 商特異点 $C[[x, y]]^G$ が有限表現型である事実と密接に関連します. これらの観察において, 2 という次元が至る所に表れている現象は, Auslander-Reiten 理論が「2 次元的」なものであり, 「n 次元 Auslander-Reiten 理論」構築の可能性を示唆していると, 私は捉えています. そこで実際に私は, 最近のプレプリントにおいて, CMA における極大 (n-2) 直交部分圏の概念を導入し, そこでは, 上で述べた意味での Auslander-Reiten 理論の n 次元版と思われる現象が, 数多く成立する事を示しました. 例えば, $C[[x, y]]^G$ が有限表現型である事実の d 次元版は, $GL_d(C)$ の有限部分群 G の不変式環 $\Lambda := C[[x_1, \dots, x_d]]^G$ が, ある自然な極大 (d-2) 直交部分圏を持つ事に相当します.

3. 研究の方法

研究目的において, Auslander-Reiten 理論は 2 次元的な理論である, と述べましたが, その事の別の証拠として「有限表現型有限次代数の森田同値類全体と, 大域次元が 2 以下で dominant 次元が 2 以上の有限次代数の森田同値類全体の間, 一対一対応が存在する」という Auslander による古典的定理が挙げられます. この定理は, 整環の表現論における関手圏の応用の先駆けと見なす事ができ, その意味で後の Auslander-Reiten 理論の萌芽であるといえます.

整環 Λ 上の Cohen-Macaulay 加群の圏 $CM \Lambda$ に対して, $CM \Lambda$ の充満部分圏 C が

$$C = \{X \in CM \Lambda \mid \text{Ext}^i(C, X) = 0 \ (0 < i \leq n)\} = \{X \in CM \Lambda \mid \text{Ext}^i(X, C) = 0 \ (0 < i \leq n)\}$$

を満たすとき, 極大 n 直交部分圏 ($n \geq 0$) と呼ぶ事にします. 最近私は「有限次代数の極大 (n-2) 直交部分圏の同値類全体と, 大域次元が n 以下で dominant 次元が n 以上の有限次代数の森田同値類全体の間, 一対一対応」を与えましたが, これは上記定理の「n 次元化」と見なされるものです.

そこで極大 (n-1) 直交部分圏においては, 「(n+1)次元 Auslander-Reiten 理論」的現象が成立する事が期待されます. 実際に私は, 極大 (n-1) 直交部分圏 C において, 圏同値 $\tau_n: \underline{C} \rightarrow \overline{C}$ 及び τ_n -Auslander-Reiten 双対

$\text{Ext}^i(X, Y) \simeq \text{Ext}^{n-i}(Y, \tau_n X)^*$ を構成し, 結論として C における τ_n -Auslander-Reiten 列

$$0 \rightarrow \tau_n X \rightarrow C_{n-1} \rightarrow C_{n-2} \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow X \rightarrow 0$$

の存在を示しました. これらはいずれも Auslander-Reiten 理論における古典的定理の (n+1)次元化と見なす事ができます.

最も基本的な例としては, $GL_d(C)$ の有限部分群 G の不変式環 $\Lambda := C[[x_1, \dots, x_d]]^G$ に対して, CMA が極大 (d-2) 直交部分圏 $C := \text{add } C[[x_1, \dots, x_d]]$ を持ちます. さらにその Auslander-Reiten quiver は G の McKay quiver と一致する事が示されますが, d=2 の場合, これらは Auslander による古典的定理を意味します.

4. 研究成果

(1) 三角圏の n-クラスター傾斜部分圏全体への, mutation と呼ばれる操作を与え, その性質を調べた (吉野雄二氏との共同研究). 特に部分剰余三角圏の構成を与え, それぞれの n-クラスター傾斜部分圏が自然に対応する事を示した. 応用として幾つかの Veronese 部分環上の rigid Cohen-Macaulay 加群を決定した.

(2) 2-クラスター傾斜部分圏をもつ 2-Calabi-Yau 的完全圏のクラスを 2 つ見つけた.

(2-i) 1 つ目 (Buan, Reiten, Scott との共同研究) は Fomin-Zelevinsky のクラスター多元環に触発されたものであり, non-Dynkin グラフ Δ の preprojective 多元環 Λ から生じる. Λ は 2-Calabi-Yau 多元環であり, Δ の Coxeter 群の元 w に対して Λ の傾斜イデアル I_w が構成されるが, 圏 $CM(\Lambda/I_w)$ が 2-Calabi-Yau 的となり, w の最短表示に応じてクラスター傾斜対象が構成される事を示した.

(2-ii) 2 つ目 (Burban, Keller, Reiten との共同研究) は 1 次元超曲面孤立特異点 $R = k[[x, y]]/(f)$ から生じる. $f = f_1 \dots f_n$ ($\text{ord}(f_i) = 1$) と分解される場合に, $CM(R)$ はクラスター傾斜対象を持つ事を示し, 全てのクラスター傾斜対象と rigid 対象を記述した. 更に f に対するこの条件は, クラスター傾斜対象の存在の必要十分条件である事を, クレパント解消の存在に関する Katz の判定法と, 非可換クレパント解消に関する Van den Bergh の結果, および昨年度の研究を総合する事により得た.

(3) n-クラスター傾加群をもつ有限次元多元環の帰納的構成を与えた. 即ち, ある条件を満たす n-クラスター傾加群を持つ有

限次元多元環として「 n -完備多元環」を導入し、 n -完備多元環上の n -クラスター傾加群の自己準同型環は、 $(n+1)$ -完備多元環である事を証明した。 1 -完備多元環は Dynkin 型の道多元環と同値であるが、上記の方法で構成される n -完備多元環のクイバーと関係式も記述した。クイバーは n 次元格子の構造を持ち、関係式は Koszul 複体における可換関係式で与えられる。

(4) Buan, Reiten, Smith との共同研究で、 2 -Calabi-Yau 三角圏における 2 -クラスター傾対象の変異に関して、Derksen-Weyman-Zelevinsky によって導入された、ポテンシャル付きクイバーの変異との互換性を証明する事ができた。応用として、クラスター傾多元環がそのクイバーで一意的に決定される、という予想を肯定的に解決した。また以前に得た、コクスター群の元に対応する 2 -Calabi-Yau 的三角圏とその 2 -クラスター傾対象に関して、自己準同型環がポテンシャル付きクイバーによって与えられる事を示した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 11 件)

- (1) Osamu Iyama, Auslander-Reiten theory revisited, Trends in Representation Theory of Algebras and Related Topics, 349--398, European Mathematical Society, 2008. 査読有り
- (2) Osamu Iyama, Idun Reiten, Fomin-Zelevinsky mutation and tilting modules over Calabi-Yau algebras, Amer. J. Math. 130 (2008), no. 4, 1087--1149. 査読有り
- (3) Osamu Iyama, Cluster tilting in 2 -Calabi-Yau categories II, Oberwolfach Report (2008), 410--414. 査読無し
- (4) Igor Burban, Osamu Iyama, Bernhard Keller, Idun Reiten, Cluster tilting for one-dimensional hypersurface singularities, Adv. Math. 217 (2008), no. 6, 2443--2484. 査読有り
- (5) Osamu Iyama, Yuji Yoshino, Mutation in triangulated categories and rigid Cohen-Macaulay modules, Invent. Math. 172 (2008), no. 1, 117--168. 査読有り
- (6) Zhaoyong Huang, Osamu Iyama, Auslander-type conditions and cotorsion

pairs, J. Algebra 318 (2007), no. 1, 93--110. 査読有り

(7) Osamu Iyama, Auslander correspondence, Adv. Math. 210 (2007), no. 1, 51--82. 査読有り

(8) Osamu Iyama, Higher-dimensional Auslander-Reiten theory on maximal orthogonal subcategories, Adv. Math. 210 (2007), no. 1, 22--50. 査読有り

(9) Osamu Iyama, Tilting modules over Calabi-Yau algebras, Oberwolfach Report (2006), 492--494. 査読無し

(10) Aslak Buan, Osamu Iyama, Idun Reiten, Jeanne Scott, Cluster structures for 2 -Calabi-Yau categories and unipotent groups, to appear in Compos. Math. 掲載決定済み 査読有り

(11) Osamu Iyama, Michael Wemyss, The Classification of Special Cohen-Macaulay Modules, to appear in Math. Z. 掲載済み 査読有り

[学会発表] (計 26 件)

(1) Osamu Iyama, n -representation-finite algebras of type A, Workshop on Representations and Cohomology, March 1-6, 2009, University of Cologne, Germany.

(2) Osamu Iyama, 2 -Calabi-Yau categories associated with Coxeter group elements, International Conference and Workshop on Cluster Algebras and Related Topics, December 8-20, 2008, Mexico.

(3) Osamu Iyama, Tiling and cluster tilting for quotient singularities, Representation theory of finite groups and algebras, and related topics, November 20-21, 2008, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto, Japan.

(4) Osamu Iyama, Cluster tilting in 2 -Calabi-Yau categories, Interactions Between Noncommutative Algebra and Algebraic Geometry, October 26-31, 2008, Banff International Research Station, Canada.

(5) Osamu Iyama, n -cluster tilting and n -APR tilting, XXth Meeting on Representation Theory of Algebras, October 24-25, 2008, Universite de Sherbrooke, Sherbrooke, Canada.

(6) Osamu Iyama, Introduction to cluster tilting in 2 -Calabi-Yau categories, Expansion of Combinatorial Representation Theory, October 7-10, 2008, Research Institute for Mathematical Sciences, Kyoto, Japan.

(7) Osamu Iyama, Cluster tilting for one-dimensional hypersurface

singularities, Interactions between Representation Theory and Commutative Algebra, September 25-27, 2008, Barcelona, Spain.

(8) Osamu Iyama, (i) Mini-course - Introduction to the Auslander-Reiten theory, (ii) n -cluster tilting and n -APR tilting, 63rd Algebra Day, September 13, 2008, Carleton University, Ottawa, Canada.

(9) Osamu Iyama, Tiling and cluster tilting objects for quotient singularities, Spectral Methods in Representation Theory of Algebras and Applications to the Study of Rings of Singularities, September 7-12, 2008, Banff International Research Station, Canada.

(10) Osamu Iyama, Tilting mutation and its application, 41st Ring and Representation theory symposium, September 5-7, 2008, Shizuoka, Japan.

(11) Osamu Iyama, Cluster tilting in 2-Calabi-Yau categories, Workshop "Crystals and Tropical Combinatorics", August 26-30, 2008, Kyoto, Japan.

(12) Osamu Iyama, n -cluster tilting for higher Auslander algebras, XIII International Conference on Representations of Algebras, July 30-August 8, 2008, Sao Paulo, Brazil.

(13) Osamu Iyama, n -cluster tilting and n -APR tilting, Mini-Symposium on ring theory in connection with representation theory and homological algebra, July 16-17, 2008, Osaka, Japan.

(14) Osamu Iyama, Recollement of homotopy categories and Cohen-Macaulay modules, Representation Theory of Algebras, June 15-25, 2008, Tehran, Iran.

(15) Osamu Iyama, (i) The finiteness of the representation dimension, (ii) Construction of algebras of finite global dimension as endomorphism algebras of n -cluster tilting objects, The Representation Dimension of Artin Algebras, May 1-4, 2008, University of Bielefeld, Germany.

(16) Osamu Iyama, Mutation of cluster tilting object and potentials, Maurice Auslander Distinguished Lectures and International Conference, April 25-27, 2008, Massachusetts, USA.

(17) Osamu Iyama, Auslander-Reiten 理論の高次元化に向けて, Lecture for Algebra Prize of the Mathematical Society of Japan, Osaka, March 25, 2008.

(18) Osamu Iyama, Cluster tilting for

one-dimensional hypersurface singularities, International Conference on Commutative Algebra, March 17-21, 2008, Yokohama, Japan.

(19) Osamu Iyama, Cluster tilting in 2-Calabi-Yau categories II, Representation Theory of Finite Dimensional Algebras, February 17-23, 2008, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach, Germany.

(20) Osamu Iyama, Cluster tilting for one-dimensional hypersurface singularities, Categorical Aspects of Algebraic Geometry in Mirror Symmetry, December 3-7, 2007, Research Institute for Mathematical Sciences, Japan.

(21) Osamu Iyama, Tilting modules over Calabi-Yau algebras, Calabi-Yau algebras and N -Koszul algebras, October 22-26, 2007, CIRM, France.

(22) Osamu Iyama, Construction of algebras with n -cluster tilting objects, Workshop on Categorification, Quantization and Clusters, September 10-14, 2007, Morningside Center of Mathematics, Beijing, China.

(23) Osamu Iyama, Auslander-Reiten theory revisited, XII International Conference on Representations of Algebras, August 15-24, 2007, Torun, Poland.

(24) Osamu Iyama, Auslander algebras of dimension three, May 10-12, 2007, Norwegian University of Technology and Science, Trondheim, Norway.

(25) Osamu Iyama, Mutations in triangulated categories and rigid Cohen-Macaulay modules, Workshop on Triangulated Categories, August 13-19, 2006, University of Leeds, England.

(26) Osamu Iyama, Mutation and tilting modules, Cluster Algebras and Cluster Tilted Algebras, May 24-28, 2006, University of Bielefeld, Germany.

[その他]
ホームページ等
<http://www.math.nagoya-u.ac.jp/~iyama/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

伊山 修 (IYAMA OSAMU)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・
准教授

研究者番号：70347532

