

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2006～2008

課題番号：18740009

研究課題名 (和文) 可積分系に関連する代数系について

研究課題名 (英文) Algebras related to integrable systems

研究代表者

鈴木 武史 (SUZUKI TAKESHI)

岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授

研究者番号：30335294

研究成果の概要：

共形場理論とよばれる可解な場の理論のモデルの代数的構造に注目し、そこに登場する代数系とその表現について研究を行った。結果、共形場理論の枠組みが、微分方程式系に関連して現れる Cherednik 代数と、系の対称性を記述するアフィン Lie 代数の表現の間の良い対応を与えていることがわかった。さらに、Cherednik 代数の可積分な表現に関連して新たな組合せ論的対象が得られた。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	1,300,000	0	1,300,000
2007 年度	1,000,000	0	1,000,000
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,300,000	300,000	3,600,000

研究分野：表現論

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：Cherednik代数, Hecke代数, アフィンLie代数, 量子群, 共形場理論

1. 研究開始当初の背景

可積分系の研究において、系の対称性に注目した代数的アプローチは主流の一つとなっている。このような立場からの研究は、数理物理の進展に大きな成果をあげてきたばかりでなく、量子群のように数学の様々な分野において重要な役割を果たすことになる新たな代数系の発見の契機ともなった。

本研究は可積分系に背景を持つ代数系について、表現論的立場から研究することで、表現論・可積分系双方への貢献を目指す。

2. 研究の目的

本研究では可積分系を通して浮かび上がる代数系相互の関係に注目し、具体的には、以下のような問題に取り組む：

(1) 共形場理論を道標に、代数系の表現の間の新たな対応を探る.

(2) Cherednik 代数の表現論について、共形場理論を介した他の代数系との関連を中心に研究を行う.

共形場理論とは、可積分系の模型のひとつであり、数学的には、対称性の代数系の表現を用いて、ホロミックな微分方程式系すなわち可積分接続を持ったベクトル束を構成する枠組である. A 型のアフィン Lie 代数を対称性として持つ平面上の共形場理論においては、対応する微分方程式系のモノドロミー表現を介して量子群や岩堀-Hecke 代数が現れ、さらに、この微分方程式系の対称性として、Cherednik 代数と呼ばれる代数が現れる.

共形場理論を、対称性の代数であるアフィン Lie 代数の表現の圏からの関手の理論と見なして調べることにより、理論に現れる代数系同士の対応を調べたい.

特に、数学的に新しい対応であるアフィン Lie 代数と Cherednik 代数の表現の間の対応に焦点を当て、その対応を通して Cherednik 代数の表現論を考える.

さらに、A 型以外の代数系について上の対応の拡張を考えることで、新たな代数系や代数系相互の関係を探る.

3. 研究の方法

共形場理論によって与えられる A 型の Cherednik 代数とアフィン Lie 代数の最高ウェイト表現の圏の間の対応(関手)を、2つの場合について研究した.

(1) レベルが正の有理数の場合の、アフィン Lie 代数の可積分表現・許容表現と対応する有理型 Cherednik 代数の表現について.

可積分系の理論にしばしば登場するアフィン Lie 代数の可積分表現および、指標に関して可積分表現と類似の性質を持つ許容

(admissible) 表現の圏は、共に半単純である. 従って、これらの圏からの関手を調べるには既約表現の行き先を調べることが重要である.

既に、既約な可積分表現が Cherednik 代数の既約な表現に移ることは、申請者によりこのクラスの表現の標準盤を用いた組合せ論的記述を用いて示されていた. この組合せ論的記述は、許容表現に対応する表現に対して拡張することができ、この表示を用いて、既約な許容表現に対して、この関手による像が有理型 Cherednik 代数の既約表現であることを示した.

そのうえで、許容表現の圏と、対応する Cherednik 代数の表現の圏の関係を明確にする(圏同値か否か)問題は今後の課題である. 予想としては、許容表現の圏は、球部分代数と呼ばれる Cherednik 代数のある部分代数の表現の圏(Cherednik 代数の表現の圏との間には自然な対応がある)とよい関係にある.

さらに、Verma 加群を含む、より大きな最高ウェイト表現の圏からの関手としてこの対応を調べ、可積分表現・許容表現に対応する Cherednik 代数の表現の研究に応用したい.

(2) レベルが負の有理数の場合の最高ウェイト表現の圏の間の対応.

この場合を調べるために、量子群や岩堀-Hecke 代数、q-Schur 代数など、関連する代

数系について得られている結果を有機的に関連付けて考察した。

特に、「最高ウエイト被覆」(または quasi hereditary 被覆)の理論を用いた新しいアプローチを探った。この目的のため、この理論のパイオニアである、オックスフォード大学の Rouquier 氏を訪ねて討議を行った、関手が具体的に与えられているので、その具体型を用いた議論と、最高ウエイト表現の一般論を用いたホモロジカルな議論とを組合わせて考えた。

4. 研究成果

共形場理論によって与えられる A 型の Cherednik 代数とアフィン Lie 代数の最高ウエイト表現の圏の間の対応(関手)について、レベルが正の有理数の場合には、許容表現に対応する有理 Cherednik 代数の表現が組合せ的に得られた。特に既約表現は既約表現に対応する。

この過程において得られた巡回的組合せ論による Cherednik 代数の表現の実現は、最近 Cherednik 代数のユニタリー表現の分類などに応用されている。

また、レベルが負の有理数の場合には、最高ウエイト被覆の理論を用いたアプローチにより、Kazhdan-Lusztig によるアフィン Lie 代数と量子群の表現の間の圏同値および Rouquier による q -Schur 代数と有理 Cherednik 代数の最高ウエイト表現の圏の間の同値を用いることで、問題の対応を適当な部分圏に制限することで圏同値が得られることがわかった。

さらに、この対応の A 型以外の場合への拡張についても考えた。この部分は今後の課題であるが、アフィン Lie 代数の最高ウエイト表現の圏(の適当な部分圏)が

Wirman-Murakami-Wenzl 代数の表現の圏の最高ウエイト被覆になっていることの証明に
応用できると期待される。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

- ① Takeshi Suzuki, Double affine Hecke algebras, conformal coinvariants and Kostka polynomials, C.R. Acad. Sci. Paris. Ser. I, 343, 383-386 (2006).

[学会発表] (計 4 件)

- ① 鈴木武史, “Conformal field theory and Cherednik algebras”, Algebraic Lie structures with origins in physics, 2009 年 3 月 24 日, ケンブリッジ(イギリス)
- ② 鈴木武史, “Cylindric combinatorics and the representation theory of Cherednik algebras”, 名古屋国際コンファレンス ”Combinatorics and representation theory”, 2008 年 9 月 1 日, 名古屋
- ③ 鈴木武史, “Cylindrical combinatorics and the representation theory of Cherednik algebras of type A”, 国際研究集会 “Cherednik Algebras”, 2007 年 6 月 19 日, エジンバラ(イギリス)
- ④ 鈴木武史, “Conformal field theory and double affine Hecke algebras” 名古屋国際コンファレンス

“Representation Theory of Algebraic
Groups and Quantum Groups 06”

2006年6月16日, 名古屋

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)

○取得状況 (計0件)

[その他]

6. 研究組織

(1) 研究代表者

鈴木 武史 (SUZUKI TAKESHI)

岡山大学・大学院自然科学研究科・准教授

研究者番号: 30335294

(2) 連携研究者

なし

(3) 連携研究者

なし