

平成 21 年 5 月 28 日現在

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2006～2008

課題番号：18740015

研究課題名（和文）正標数代数多様体の変形族の構造と標数 0 への持ち上げ可能性

研究課題名（英文）The structure of families of algebraic varieties of positive characteristic and their liftability to characteristic 0

研究代表者

川添 充 (KAWAZOE MITSURU)

大阪府立大学・総合教育研究機構・准教授

研究者番号：10295735

研究成果の概要：有理曲線上の自明な代数曲線束によって純非分離被覆される非特異極小代数曲面の分類について、自明な曲線束がもつ 2 方向の自然な射影から誘導される 2 方向のファイブレーション（有理曲線上の代数曲線ファイブレーションと、代数曲線上の有理曲線ファイブレーション）およびアルバネーゼ射を活用することで、対象とする曲面の大まかな分類を得た。一般の代数曲線束の詳細な分類については今後さらなる研究が必要である。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	1000000	0	1000000
2007 年度	900000	0	900000
2008 年度	900000	270000	1170000
年度			
年度			
総計	2800000	270000	3070000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：代数多様体、退化、純非分離射、代数曲面

1. 研究開始当初の背景

(1) ファイバー構造をもつ多様体の構造研究が重要であるのは、それが多様体の変形理論やモデュライ理論という代数幾何学の中心的問題と深く関係するものであるとともに、さらには数論などとも密接な関係があるからである。また、複素解析的多様体論や標数 0 あるいは正標数の抽象代数幾何学の相互補完によって発展してきた代数幾何学においては、異なる圏同士の関係に関する問題、たとえば複素解析的多様体の圏の中での代

数多様体や、標数 0 への持ち上げ可能な正標数代数多様体の特徴づけに関する問題が、古くから盛んに研究されてきたが、この種の問題においても、ファイバー構造を持つ多様体は、より幾何学的なアプローチが可能な多様体として重要な意味を持っている。標数 0 への持ち上げが不可能な多様体は、正標数の病理をよく表すものとして、非常に重要な研究対象であるが、標数 0 への持ち上げが不可能な正標数代数曲面の例がファイバー構造をもつ曲面を用いて構成できる。

(2) 標数 0 への持ち上げ不可能な多様体の存在に代表される、正標数の代数幾何学における病理学的研究の源流は、Mumford や Bombieri らの研究にさかのぼる。Bombieri と Mumford による共同研究の中で、正標数の代数曲面を分類していく中で、準楕円曲面と呼ばれる、尖点特異点をもつ 3 次曲線の変形族が現れることが見いだされた。退化した多様体の族の全空間が非特異となりうるというのは正標数特有の現象である。尖点特異点をもつ曲線の族としての構造をもつ代数曲面の研究は、代数曲線上のアフィン直線の族としての開代数曲面の研究とも関連し、Takeda による、楕円曲線上の尖点特異点を 1 つだけもつ有理曲線の族の構造を持つ、偽超楕円曲面の研究等、これまでも多くの研究者によってなされてきたが、このような多様体から標数 0 への持ち上げが不可能な多様体が数多く見いだされる。このような多様体の構成には正標数特有の純非分離射が深く関わっている。純非分離射を被覆射とする多様体と被覆射の組の構成については、Rudakov-Shafarevich による先駆的な研究がある。Rudakov-Shafarevich の研究では、標数 p の体上定義された多様体 X, Y について、 X から Y への被覆度数 p の純非分離射は、多様体 X 上の p 閉ベクトル場の同値類と 1 対 1 に対応することが示されている。具体的には、被覆度数 p の純非分離射 $\pi: X \rightarrow Y$ に対し、 p 閉ベクトル場 D で $k(X)^D = k(Y)$ となるものが対応し、 $X = \bigcup \text{Spec}(A)$ に対し、 $Y = \bigcup \text{Spec}(A^D)$ かつ $\pi^*: A^D \rightarrow A$ となる。その応用として、準非分離被覆の例を具体的に構成して調べることが可能となった。被覆度数 p の準非分離被覆の p 閉ベクトル場を用いた構成としては、Takeda, Katsura-Takeda, Hirokado など多くの研究があり、さまざまな正標数代数曲面の例や、標数 0 への持ち上げが不可能な正標数の 3 次元 Calabi-Yau 多様体の例の構成などの結果が知られている。

(3) このような流れの中で、これまでの研究では、とくに、楕円曲線と代数曲線の直積で被覆される正標数の代数曲面の構造の解明に焦点をあててきた。とくに、楕円曲線と代数曲線の直積で非分離的に被覆される正標数の楕円曲面の場合について、アルバネーゼ射によるファイバー構造が尖点特異点をもつ曲線の族となっていることを利用して、楕円曲面となる場合の重複ファイバーの現れ方がある種の有理微分形式と深い関係にあることなどを見出し、楕円ファイブレーションの重複ファイバーの台が楕円曲線の場合には、重複度の p ベキ部分にある種の制限がつくことを明らかにしてきた。また、楕円曲線と代数曲線の直積で純非分離に被覆される正標数の代数曲面について、各種不変量

を計算し、それらの標数 0 への持ち上げ可能性について考察を行ってきた。また、とくに、自明な楕円繊維曲面に純非分離に被覆される曲面について、Rudakov-Shafarevich の理論を応用して出現する曲面の分類と一般型の曲面になるための条件やその性質について研究を行ってきた。その結果、とくに楕円曲面となる場合については、標数 p の体上定義された自明な楕円繊維曲面からの度数 p の純非分離射の多重合成の像として得られる商多様体の分類などについて、十分な成果を得られていた。

2. 研究の目的

これまでの研究では、楕円曲線束に被覆される曲面に焦点を当ててきたが、本研究では、より一般の代数曲線束に純非分離に被覆される曲面の構造を調べ、標数 0 への持ち上げ可能性の観点から、これらの曲面の幾何を調べる。本研究の特色は、はじめに付与されているファイバー構造と、アルバネーゼ射を経由する別方向へのファイバー構造の両方を駆使する点、および、純非分離射を被覆度数 p の射の合成としてとらえる点にある。被覆度数 p の射の合成としてとらえることにより、各被覆度数 p の射を、Rudakov-Shafarevich の理論によって p 閉ベクトル場による商写像ととらえることができ、これによって、商曲面として現れる代数曲面を具体的に調べることができるのである。実際、楕円線織曲面を研究した際には、この独特の方法により、さまざまな成果をあげることができており、本研究の手法としても十分な成果をあげると期待できる。具体的には、とくに重要な有理曲線上の代数曲線束に純非分離的に被覆される曲面を対象として、自明な楕円繊維曲面に純非分離に被覆される曲面についての結果を一般化すること、自明な代数曲線束に純非分離に被覆される曲面についてその構造を調べるとともに、標数 0 への持ち上げ可能性の観点からこれらの曲面の幾何を調べること、さらに、その分類・標数 0 への持ち上げ可能性についての考察・一般型曲面の具体的構成を行うことを目的とした。

3. 研究の方法

有理曲線上の自明な代数曲線束によって純非分離被覆される代数曲面を分類する手法としては、以前楕円曲線束に用いた手法と類似のものを用いる。楕円曲線束の場合のポイントは、アルバネーゼ射によるファイバー構造を楕円ファイブレーションとともに用いること、純非分離射を重複度が標数 p と等し

い射の合成に分解して、度数 p の純非分離射で被覆される曲面の組の系列に対し各々の組に Rudakov-Shafarevich 理論を適用すること、の 2 点であった。本研究で扱う、有理曲線上の代数曲線束で純非分離的に被覆される曲面においても、有理曲線からアーベル多様体への写像が定数写像しかないことより、楕円曲線束の場合の手法の 2 つポイントは本研究の対象でも同様に適用可能である。ただし、楕円曲線束の場合と違い、一般の代数曲線束ではアルバネーゼ多様体の次元は 2 以上となってしまうので、純非分離射への Rudakov-Shafarevich 理論の適用による分類が難しくなる。このため、本研究では、アルバネーゼ射と自明な曲線束における有理曲線束を与える方向のファイブレーションを組み合わせることにした。

4. 研究成果

(1) 有理曲線上の自明な代数曲線束によって純非分離被覆される非特異極小代数曲面について、純非分離射を被覆度数 p の純非分離射の合成に分解して調べた。具体的には、以下の条件設定のもとで対象とする曲面の分類を考察した。

$$X_0 = \mathbf{P}^1 \times C \xrightarrow{\pi_0} X_1 \xrightarrow{\pi_1} \mathbf{L} \xrightarrow{\pi_{n-1}} X_n$$

(ア) X_i は標数 p の体上で定義された正規曲面
(イ) π_0 は $F \circ pr_i$ と pr_j の直積に分解しないものとする。ただし、 pr_i と pr_j はそれぞれ X_0 における \mathbf{P}^1, C への自然な射影であり、 F は相対的フロベニウス射である。

(ウ) すべての $i=0,1,2,\dots,n-2$ について、 $\pi_{i+1} \circ \pi_i$ はフロベニウス射ではない。

条件 (イ) は、 π_0 の像 X_1 が $\mathbf{P}^1 \times C$ と同型にならないためのものであり、また、(ウ) は、被覆列から自明な被覆を排除するための条件である。

上記の 3 条件のもとで、 $\mathbf{P}^1 \times C$ から始まる被覆度数 p の純非分離射の多重合成を考えることは、以下のような、代数曲面とその上の p 閉ベクトル場の組による列を考察することに等しい。

$$((X_0 := \mathbf{P}^1 \times C, D_0), (X_1, D_1), \dots, (X_{n-1}, D_{n-1}))$$

ただし、 D_i は X_i 上の p 閉ベクトル場、 X_{i+1} は X_i の D_i による商多様体、すなわち、 $X_{i+1} = X_i^{D_i}$ であり、以下の条件を満たすものである。

(ア) X_i は標数 p の体上で定義された正規曲面

(イ) D_0 は \mathbf{P}^1, C のどちらにも自明には作用しない、すなわち、商写像 $X_0 \rightarrow X_1 = X_0^{D_0}$ は $F \circ pr_i$ と pr_j の直積に分解しないものとする。

(ウ) すべての $i=0,1,2,\dots,n-2$ について、商写像の 2 回合成 $X_{i-2} \rightarrow (X_{i-2}^{D_{i-2}})^{D_{i-1}}$ はフロベニウス射ではない。

(2) 上記設定のもとで、次の結果が得られた。

(2-1) X_i, π_i を (1) と同様のものとし、 \mathbf{P}^1, C_i をフロベニウス射の i 回合成による \mathbf{P}^1, C の像とする。このとき、射影 pr_1 と pr_2 から誘導される自然な射 $\psi_i: X_i \rightarrow \mathbf{P}^1$ と $\phi_i: X_i \rightarrow C_i$ は、 \mathbf{P}^1 にも C_{i-1} にも持ち上がらない。すなわち、 $\tilde{\phi}_i = F \circ \phi_i$ あるいは $\tilde{\psi}_i = F \circ \psi_i$ となる射 $\tilde{\phi}_i, \tilde{\psi}_i$ は存在しない。この結果は、 $X_{i-1}, X_i, X_{i+1}, \mathbf{P}^1, C$ について、これらの関数体の関係を、各写像 $X_{i-1} \rightarrow X_i \rightarrow X_{i+1}, X_i \rightarrow \mathbf{P}^1, X_i \rightarrow C$ などを通して調べることで得られる。

(2-2) X_i, π_i を (1) と同様のものとし、 Y_i を X_i の非特異極小モデルとする。このとき、 $q(Y_i) = g(C)$ が成り立つ。このことは、各 X_i に対して、 $\phi_i: X_i \rightarrow C_i$ のファイバーが既約有理曲線であることから、アルバネーゼ射で各ファイバーが 1 点につぶれることより従う。

(2-3) X_i, π_i を (1) と同様のものとし、 D_i を π_i に対応する p 閉ベクトル場、すなわち、 $X_{i+1} = X_i^{D_i}$ となるものとする。(1) における条件 (ア) は、 D_0 の X_0 における \mathbf{P}^1, C への作用が自明ではないことを意味する。このとき、 $g(C) \geq 2$ に対して、 X_i の非特異極小モデル Y_i について以下のことが成り立つ。

1. $\kappa(Y_i) \geq \kappa(Y_{i-1})$
2. $\kappa(Y_{i-1}) = -\infty$ または、 Y_{i-1} が C 上の (尖点特異点をもつ) 有理曲線族かつ \mathbf{P}^1 上の非特異代数曲線族であり、すべてのファイバーの台は既約であるとする。
このとき、
(ア) $Y_{i-1}^{D_{i-1}}$ が非特異ならば、 Y_i は C 上の (尖点特異点をもつ) 有理曲線族であり、かつ、 \mathbf{P}^1 上の既約代数曲線族となり、 $c_2(Y_i) = c_2(Y_{i-1})$ 。
(イ) $Y_{i-1}^{D_{i-1}}$ が特異点をもつならば、 $c_2(Y_i) \geq c_2(Y_{i-1})$ 。

(3) 上記の分類が得られた後、 p 閉ベクトル場の作用を具体的に調べて事例を整理し、一般の代数曲線束についての詳細な分類にとりかかる予定であったが、これについては、研究期間の間には十分な結果が得られなかった。また、一般の有理織織曲面の場合にはどのような性質をもつ一般型代数曲面が生み出されることになるのかや、商多様体の非特異モデルの各種不変量がどのようになるかについても一部の不変量について計算できただけにとどまった。これらについては今後さらなる研究が必要である。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 1 件)

1. M.Kawazoe and T.Takahashi,
Pairing-friendly hyperelliptic curves with
ordinary Jacobians of type $y^2 = x^5 + ax$,
LNCS vol. 5209, 164-177, 2008.

[学会発表] (計 1 件)

1. M.Kawazoe and T.Takahashi,
Pairing-friendly hyperelliptic curves with
ordinary Jacobians of type $y^2 = x^5 + ax$,
Pairing 2008, Royal Holloway, University of
London, 2008.9.1.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

川添 充 (KAWAZOE MITSURU)

大阪府立大学・総合教育研究機構・准教授
研究者番号：10295735