

平成 21 年 5 月 21 日現在

研究種目：若手研究 (B)  
 研究期間：2006～2008  
 課題番号：18740018  
 研究課題名 (和文) グレブナー基底による不変式に纏わるイデアル及び環の解析とその情報科学への応用  
 研究課題名 (英文) Groebner bases of ideals and rings related with invariant polynomials and its application to information science  
 研究代表者  
 大杉 英史 (HIDEFUMI OHSUGI)  
 立教大学・理学部・准教授  
 研究者番号：80350289

研究成果の概要：本研究では、グレブナー基底の理論を活用して、有限群の不変式に纏わるイデアルや、対称性の高い生成系を持つイデアルなどを解析し、情報科学、統計学への応用を目的として研究を行った。その結果、ヒルベルトイデアルの (普遍) グレブナー基底や、豊富な対称性を持つ配置 (セグレ・ベロネーゼ配置, ネストされた配置など) に付随するトーリックイデアルやトーリック環について環論的な性質などの解明に成功した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	1,000,000	0	1,000,000
2007 年度	700,000	0	700,000
2008 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,500,000	240,000	2,740,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・代数学

キーワード：環論, グレブナー基底

## 1. 研究開始当初の背景

当該研究は、具体的な構造の研究がほとんどなされていないヒルベルトイデアルのグレブナー基底を研究し、さらには、その結果を Derksen のアルゴリズムを介して不変式環の生成系の解析に応用するため、トーリックイデアル・SAGBI 基底を用いた手法にも挑戦し、趣の全く異なる手法を組合せようという試みであった。ヒルベルトイデアルの構造の解析が進めば、不変式環の研究に対して、大きな寄与が期待できる。また、当該研究の特徴は、このような典型的

な純粋数学への応用に加えて、情報科学、統計学などへの応用にも挑戦する点である。グレブナー基底が情報科学分野などに应用される際、必ず言及されるのは「実際にはグレブナー基底計算に時間がかかるので・・・」という問題点である。このような背景のもと、イデアルのグレブナー基底の構造をしっかりと解析した上で応用を考えることにより、より実用的な工学的応用の実現を目指した。

## 2. 研究の目的

多項式環のイデアルの特殊な生成系である

グレブナー基底は、多変数多項式方程式の求解、可換代数、代数幾何、整凸多面体、整数計画、符号理論など、様々な分野における問題にアルゴリズム的手法を与え、幅広い応用がある。当該研究では、グレブナー基底の理論を活用して、有限群の不変式に纏わるイデアルなどを解析し、不変式環の構造の研究や、符号理論などの情報科学への応用を目的とした。具体的な目的は以下の3点であった。

(1) ヒルベルトイデアルのグレブナー基底ある有限群の(次数が正の)不変式で生成されるイデアルはヒルベルトイデアルと呼ばれ、多くの分野に現れる重要な研究対象である。しかしながら、そのグレブナー基底については、ほとんど未解明というのが現状である。当該研究では、様々な有限群に対してそのヒルベルトイデアルのグレブナー基底を解析し、次数の上限など、ヒルベルトイデアルに纏わる予想の解決を目指す。

(2) 不変式環の生成系  
不変式環の生成系を求めるアルゴリズムについてはレイノルズ作用素を使った古典的な良く知られたものがあるが、より効率的なアルゴリズムを求めて活発な研究がなされている。当該研究では、第一に、上記(1)で解析したヒルベルトイデアルをもとに、Harm Derksen による、ヒルベルトイデアルを経由した方法を用いて不変式環の生成系を解析する。また、第二に、不変式環の生成系については、別のアプローチとして、トーリックイデアルを用いて SAGBI 基底(“部分代数版”グレブナー基底)を求める手法が知られているが、これまでトーリックイデアルについて、多くの結果を残してきた実績を生かし、この方法によっても不変式環の生成系を解析する。最終的には両者を用いた方法を比較し、融合を図ることを目標とする。

(3) 符号理論・統計学への応用  
符号理論とグレブナー基底は関係が深く、例えば、多次元巡回符号の復号アルゴリズムなどに応用されている。最近、対称群のヒルベルトイデアルのグレブナー基底を利用して、BCH 符号の最小距離計算を高速化する手法が発表されたが、成果としては不十分なものであった。当該研究では、ヒルベルトイデアルのグレブナー基底を用いた符号理論への応用を模索する。また、分割表の検定法の一つである、マルコフ連鎖モンテカルロ法に用いられるマルコフ基底は、トーリックイデアルの生成系と同値であることが知られているが、現れる配置は豊かな対称性を持つことが多く、不変マルコフ基底について多くの研究がある。当該研究では、豊かな対称性を持つ配置に付随するマルコフ基底の分析を目指

す。

### 3. 研究の方法

様々な有限群の系列に対して、そのヒルベルトイデアルのグレブナー基底を解析し、これをもとに、ヒルベルトイデアルに纏わる幾つかの予想の解決を目指した。具体的には、ヒルベルトイデアルの生成元の次数が、群の位数以下であるという予想や、与えられた群とその部分群に対して、両者が一致するための、体の標数の条件を求めることなどである。また、豊富な対称性を持つセグレ配置や、ベロネーゼ配置の一般化を目指し、それらの配置の環論的性質(2次のグレブナー基底の存在、正規性など)について重点的に研究した。

### 4. 研究成果

初年度の研究では、特に符号理論への応用に注目した。Sala は巡回符号の最小距離計算に、対称性の高い元を生成系として持つイデアルのグレブナー基底を活用する手法を発明した。さらにその計算を高速化するため、対称群のヒルベルトイデアルのグレブナー基底を活用している。研究では、Sala の方程式に付随するイデアルについて、様々な単項式順序についてグレブナー基底を計算した。その結果、Sala の論文に記載されているグレブナー基底と比較してかなり簡明なグレブナー基底を得た。また、青木一竹村は、分割表の解析に関連するトーリックイデアルについて研究する際、対応する配置、生成系に高い対称性があることに着目している。研究では、豊かな対称性を持つ配置として、Segre-Veronese 型配置について研究した。その結果、当該配置について飛躍的かつ自然な一般化を得た。すわなち、もともとは、「変数をブロックに分け、ブロックごとに Veronese 型」という定義であったが、特にブロック間に重複があっても良いことが判明した。これによって適用範囲が格段に広がっただけでなく、記述も非常に簡明になった。2007 年度の研究では、初年度に引き続き、豊かな対称性を持つ配置として、Segre-Veronese 型配置について研究した。拡張された Segre-Veronese 型配置とは、変数からなるブロックを幾つか用意し(ただし、ブロック同士に共通する変数があってもよい)、ブロックごとに Veronese 型であるような配置であり、Segre 積、Veronese 部分環など、伝統的な配置を含んだ重要なクラスである。この配置のトーリックイデアルは2次の2項式からなるグレブナー基底を持つが、これは例えば、センター試験における科目の選択などの統計的分析に活用することがで

きる。この概念をさらに発展させ、このような操作をネストするような配置を定義した。このネストされた配置のトーリックイデアルは、もとの配置が2次のグレブナー基底をもてば、ある単項式順序に関して2次のグレブナー基底をもつことが判明した。このグレブナー基底を、マルコフ連鎖モンテカルロ法を適用する際のいわゆるマルコフ基底として用いることによって、さきほど述べた応用が適用できる統計的問題の範囲が格段に広がった。また、今後は、これを環論的操作と捉えて、どのような環論的性質が遺伝するかなどを研究すれば、不変式に纏わる様々な環論的問題への応用が期待できると思われる。分割表の検定法の一つである、マルコフ連鎖モンテカルロ法に用いられるマルコフ基底は、トーリックイデアルの生成系と同値であることが知られているが、現れる配置は豊かな対称性を持つことが多く、不変マルコフ基底の研究が竹村彰通氏や、青木敏氏などによってなされている。最終年度の研究では、2元部分表和問題に付随するトーリックイデアルについて研究を行い、その豊かな対称性を利用して、以下の6つ条件が同値であることを証明した。(1) 付随するトーリックイデアルは2次の2項式で生成される(2) ある単項式順序が存在して、付随するトーリックイデアルのイニシャルイデアルはスクエアフリーな単項式で生成される(3) ある単項式順序が存在して、付随するトーリックイデアルのグレブナー基底は2次の2項式から成る(4) 付随するトーリック環は正規である(5) 付随するトーリック環はコストル代数である(6) 対応する部分表は、(原一竹村一吉田によって定義された)  $2 \times 2$  ブロック対角、または、三角になっている。この研究結果は、原一竹村一吉田(2007年)が証明した「(1)と(6)は同値」を拡張したものであり、これによって、2元部分表和問題に付随するトーリックイデアル、トーリック環の環論的性質が完全に特徴付けられた。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計6件)

- ① Juergen Herzog, Takayuki Hibi and Hidefumi Ohsugi, Unmixed bipartite graphs and sublattices of the Boolean lattices, Journal of Algebraic Combinatorics, in press. (査読有)
- ② Satoshi Aoki, Takayuki Hibi, Hidefumi Ohsugi and Akimichi Takemura, Markov basis and Gröbner basis of

Segre-Veronese configuration for testing independence in group-wise selections, Annals of the Institute of Statistical Mathematics, in press. (査読有)

- ③ Hidefumi Ohsugi and Takayuki Hibi, Two way subtable sum problems and quadratic Gröbner bases, Proceedings of the AMS, 137 (2009) 1539-1542. (査読有)
- ④ Satoshi Aoki, Takayuki Hibi, Hidefumi Ohsugi and Akimichi Takemura, Gröbner bases of nested configurations, Journal of Algebra, 320 (2008) 2583 - 2593. (査読有)
- ⑤ Hidefumi Ohsugi, A geometric definition of combinatorial pure subrings and Gröbner bases of toric ideals of positive roots, Comment. Math. Univ. St. Pauli, 56 no. 1 (2007) 27 - 44. (査読有)
- ⑥ Takashi Wada and Hidefumi Ohsugi, Gröbner bases of Hilbert ideals of alternating groups, Journal of Symbolic Computation, 41 No.8 (2006), 905 - 908. (査読有)

[学会発表] (計7件)

- ① Juergen Herzog, 日比孝之, 大杉英史, Unmixed bipartite graphs and sublattices of the Boolean lattices, 日本数学会年会, 2009年3月29日, 東京大学.
- ② 青木敏, 日比孝之, 大杉英史, 竹村彰通, Gröbner bases of nested configurations, 日本数学会秋季総合分科会, 2008年9月24日, 東京工業大学.
- ③ Hidefumi Ohsugi, Simple Polytopes Arising from Finite Graphs, 2008年7月14日-7月17日, WORLDCOMP'08, アメリカ・ラスベガス.
- ④ 大杉英史, 日比孝之, Simple edge polytopes, 日本数学会年会, 2008年3月26日, 近畿大学.
- ⑤ Hidefumi Ohsugi, Smooth edge polytopes, Projective Normality of

Smooth Toric Varieties, 2007年8月  
12日-18日, オーバーヴォルフアッハ研  
究所(ドイツ).

- ⑥ 青木敏, 日比孝之, 大杉英史, 竹村彰  
通, グループごとに制約がある選択問  
題の条件付検定手法と Segre-Veronese  
型配置のグレブナー基底, 日本数学会  
年会, 2007年3月29日, 埼玉大学.
- ⑦ Hidefumi Ohsugi, Gröbner bases of  
toric ideals, 2006年7月27日-7月  
29日, Efficient Computation of  
Gröbner bases and Mathematical  
Algorithms Based on It, 韓国・KIAS.

[図書] (計1件)

- ① 日比孝之編, 『グレブナー基底の現在』,  
数学書房, (2006) 197-214 (第9章).

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

大杉 英史 (HIDEFUMI OHSUGI)  
立教大学・理学部・准教授  
研究者番号: 80350289

### (2) 研究分担者

### (3) 連携研究者