様式 C-19

# 科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　６月　３日現在

研究種目：若手研究（B）
研究期間：2006～2008
課題番号：18740022
研究課題名（和文）　数論的誤差項の漸近的挙動とその平均値定理について

研究課題名（英文）　On the asymptotic behaviour and the mean value theorems for number-theoretic error terms

研究代表者
古屋　淳（FURUYA JUN）
沖縄工業高等専門学校・総合科学科・講師
研究者番号：10413890

研究成果の概要：　数論的関数の和より生じる誤差項の平均値定理の考察を行う、ということがこの研究の主目的である。この立場の下、約数問題の類似物の問題である「k-free divisor problem」における平均値定理、ガウス数体のイデアルの個数関数を含む指数和における誤差項の平均値定理の解析、約数問題における誤差項を係数にもつディリクレ級数の解析的性質の考察を行い種々の平均値定理、および、その平均値定理と関連分野へのつながり・影響の考察を行った。

交付額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合　計 |
|---|---|---|---|
| ２００６年度 | 1,100,000 | 0 | 1,100,000 |
| ２００７年度 | 1,100,000 | 0 | 1,100,000 |
| ２００８年度 | 900,000 | 270,000 | 1,170,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総　計 | 3,100,000 | 270,000 | 3,370,000 |

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・代数学
キーワード：平均値定理、数論的誤差項、約数問題、円問題、ディリクレ級数、解析接続、オーダー評価

## １．研究開始当初の背景

数論的関数は一般的には激しく振動する関数であることが知られている。単独ではこの関数の挙動をつかむことは非常に難しい、そこでその平均値（数論的関数の和）を考えその挙動を平均的に捕らえる、という研究は古典的に行われてきている。この平均値は一般的には漸近公式で与えられるものである。数論的関数の和の解析はまずは「和に関する漸近公式を導く」ことであるが、それに続く研究として「その漸近公式中の誤差項 E(x)の深い考察」というものが挙げられる。これは、漸近公式として最良のものを導く、すなわち、この誤差項 E(x)の最良評価を求めるという設定の問題である。この問題の難しさは「E(x)自身も振動関数である」という事実に由来する。すなわち、再び平均値定理を考察するという動機が芽生えることになる。このような動機の下での平均値定理は古くから考察されてきているが特に１９８０年代以降に盛んに取り組まれて種々の著しい結果が得られている。特に「ディリクレの約数問題」と呼ばれる古典的難問に関しての平均値

理論の研究の進展に関しては特筆のものがある。また、約数問題を中心とする平均値定理の解析の中で得られた結果・その手法はゼータ関数ζ(s)の理論や他の数論の諸問題に応用されているなど「他の分野への貢献度も高い」と位置づけられる重要な問題となっている。

## ２．研究の目的

前述の通り、数論的誤差項の平均値定理、特に約数問題における誤差項の平均値定理の研究は近年盛んに行なわれ古典論の見直し・改良、および、注目すべき新たなる結果が得られている、など著しい発展を遂げている。本研究では、その理論の発展・特に約数問題における理論の発展、を踏まえ、それらをより一般的な場合へと応用を行い、またその応用の可能性を考察することを目標とする。また、そのために必要となる新たなる理論の開発、特に既存の理論の限界やその理論の特殊性を見出すことも目標とする。

数論的誤差項の平均値は大きく分けて「離散型平均値」（和による平均）と「連続型平均値」（積分による平均）の２種類が存在する。現状では、平均値定理における結果は連続型平均により得られたものが大半を占める。このことは現状において活用されている平均値の理論が「積分法の理論」を大元にしているということに起因するからである。これら２つの平均値はある種の恒等式で結びついていることが知られている。古典論においても、この２つの平均値のつながりから得られている平均値定理は存在する。例えば、約数問題におけるある種の連続型平均公式は離散型平均値の結果をその結びつきに当てはめることによって得られる。このような背景を基にし、本研究においては、現状では進展が行き詰っている分野に対して、連続型平均の理論だけでは考えられなかった現象を捉えることや、停滞気味な分野における研究に対して何らかの寄与を与える、ということを考えていくこととする。

これらの研究の遂行には約数問題における誤差項Δ(x)、もしくは他の数論的誤差項E(x)に関する「新たなる積分公式・和公式の開発」「現在用いられている種々の公式の別証明・それに類似する公式の証明」等の付随する研究も必要となるはずである。そのような研究も同時に、または、先行するものとして取り組んでいくことも目標としていく。これらの研究、または、このような解釈の下での積分公式の研究は本研究の主目的からは外れるものではなく、これらの研究も数論的誤差項の平均値定理において新たなる性質を見つけ出すと共に現状の研究に対しても深いつながりが見出せるという期待が大いに持てる研究になるという位置づけがされる目標である。

このような立場・目的から研究を遂行していくがとりわけディリクレの約数問題の周辺の問題から研究を開始・上記のような立場からの問題の見直しや関連事項の考察を行っていくことを第一の目標に考える。

## ３．研究の方法

目的の項でも述べているが、本研究はまずは「古典論の見直し」「既存の結果の別解釈」等を目標とし研究の遂行を行うことを考えて計画されている。「連続・離散の 2 平均の差の解析」、特に「2 乗平均に関する差の解析」は２０世紀前半に G.H. Hardy により研究されていう。また、一般的な設定でのこの種の研究としては S.L.Segal による２つの連続・離散の（一乗）平均の考察が行われその後種々の数論的誤差項の（一乗）平均の差の解析・離散型もしくは連続型（一乗）平均の漸近公式が研究され、注目すべき結果が得られている。

二乗以上の平均に対する差の解析は一般論・一般的な設定での研究、約数問題におけるこのような研究は Hardy 以降は特に研究は行われてはいないのが現状であったが、本課題採択前の過去において本研究代表者により一般的設定による差の考察・約数問題における Hardy の評価の改良が得られている。そこで利用された結果は現在における最良の結果を用い、また現在知られている結果を用いて得られている。評価の改良や他の問題への応用を考えるためには既存の方法・結果では不可能といわざるを得ない。そこで、それら方法の再考察を行い「離散型平均値の理論に対する見直し」「離散型平均値に対する新しい理論の構築」を元に研究を行うことをまずは研究方法の第一と考えることとする。

また、前述のように離散型平均と連続型平均はある種の恒等式で結びついているが、その恒等式には数論的誤差項 E(x)とある種の振動関数の積に関する積分が関連している。この積分の取り扱いがこの種の差の解析においての困難さをもたらすことが知られている。そこで、平均値の解析という目標のためこの種の振動関数を乗じた場合についての平均値定理についても考察を行うことを計画する。これに関しては、これらの平均値の差の解析に対応するものだけではなく種々の場合について考察をおこなっていくことにする。これは、新しい対象に対して結果を得る、ということだけではなく、関連分野から研究に入ることにより実際に場合に対するアプローチを模索していくという意味をも含む計画である。

さらに、既存の理論の応用としてまだ平均

値定理が未知の場合の考察、および、現在得られている平均値定理の改良も考えていく。これらの研究の遂行としては、既存の結果の解析を行うことにより問題点を見出し、その問題点の打破のために何を当てはめるか、または、どのような新理論の構築を行うかをその場合において研究していくという方法をとることを計画する。

４．研究成果

「数論的誤差項の性質の解析」を目的とし取り組んだ課題に対し、得られた成果は大きく分けては以下の３つに分けられる：

（１）k-free divisor problem における平均値定理
（２）ガウスの数体におけるイデアルの個数関数を含む指数和より生じる誤差項の平均値定理
（３）ディリクレの約数問題における誤差項を係数にもつディリクレ級数の解析的性質の考察

以下、その詳細について述べていく。なお、研究（1）および（3）は他研究機関の研究者との共同研究という形で遂行された研究である：

（１）k-free divisor problem における平均値定理：

2 以上の整数 k に対し、数論的関数 dk(n)を「n の約数で素数の k 乗で割り切れないものの個数」を表すものとして定義する。また、この関数の和より生じる誤差項をΔk(x)とおく。約数問題における誤差項と同様に、この関数についても最良評価を求めるべく評価の研究が行われている。

本研究課題においてはこの関数の二乗平均を考えそれを漸近公式として書き下すことに成功した。その公式の証明は約数問題における誤差項の二乗平均公式に証明において用いられた手法を基にしたものである。具体的には「ヴォロノイ型公式」と呼ばれる誤差項の近似公式での表示を与え、その表示式を二乗し、積分することにより証明することになる。しかしながらこの場合にはその表示式が約数問題におけるそれよりもはるかに複雑なものになる。実際、この場合においてはヴォロノイ公式の係数にメビウス関数が表れる形になり「係数和を考える」という点においてまずは複雑さを生じさせることになる。このメビウス関数の影響は二乗平均公式の最終的な結果にも影響を及ぼすことになる。その２乗平均公式の誤差項はメビウス関数の平均値（和）の上からの評価の最良結果が直接対応する形になることになる。また、関連する関数の評価はその分割の方法・個数等の面においても約数問題に比べはるかに複雑なものになる。しかしながらそこで用いられている手法は古典論でのそれを基本にしたものである。また、この表示式を利用し「オメガ評価」と呼ばれる、Δk(x)のある種の評価の限界を証明することに成功した。

さらに、リーマン予想の仮定の下、小さい値のｋに対してはその二乗平均公式中の誤差項の評価が改良できることも証明した。これは、リーマン予想の仮定の下では生成関数の解析接続領域が広がるためそれを元に良い評価が得られる、ということに理由がある。

（２）ガウスの数体におけるイデアルの個数関数を含む指数和より生じる誤差項の平均値定理：

この研究は、本研究の研究代表者が過去に得た結果に関して、当時の研究では解析できなかった部分を補完する形で行われた研究についての結果である。

２次体のイデアルの個数を表す数論的関数に指数関数 exp(2πihn/k) を乗じた関数、または、イデアルの個数関数の一般化にその種の指数関数を乗じた関数、についての和を考える。ここで，h，k，n は自然数である。この和より生じる誤差項を P(x;h/k) としたときの平均値定理、特に二乗平均に関しては本研究代表者の先行する研究が存在する。その研究においては P(x;h/k)の二乗平均公式における更なる誤差項 Q(x;h/k)の解析が行われている。具体的には、この関数そのものの上からの評価・この関数の平均値の上からの評価を一般的な設定で与えられている。また k=4 の場合の考察として、h が 4 の倍数かｈが奇数の場合は一般的な設定よりもそれらの評価が改良できること、すなわちより良い結果が得られることが証明されている。この k=4 の場合はガウスの円問題のある種の拡張になっている重要な例になっている。残りはｈが 4 で割って 2 余る場合であるがこの場合についてはこのような改良は得ることができなかったのが現状である。

これに対して、本課題では残った場合である「k が 4 で割って余りが 2 になる場合」に対して Q(x;h/k)そのもの、および、その平均値の上からの評価がその他の場合と同様に改良できることの証明を行なった。先行する研究においてこの場合が取り扱えなかった理由は「生成関数に対応する additive divisor problem 型の和公式に対する漸近公式の取り扱いができない」というところに理由があった。しかしながら、実際この場合は

イデアルの個数関数にディリクレ指標を乗じた形の additive divisor problem の考察を行なえばよいことが証明されたため、既存の結果の変形によりこの難点が打破されることが分かり新たなる結果を得ることに到達できたのである。しかしながら、この場合は計算過程において以前の場合よりも複雑な状況になっているといえる。すなわち、その計算のとり扱いは必ずしも依然と同様というわけではなく、新たなる手法に適用などの工夫がなされているものである、と言及できるものであるといえる。

（３）ディリクレの約数問題における誤差項を係数にもつディリクレ級数の解析的性質の考察

約数関数の誤差項をΔ(x)とおく。またこの関数そのもの、および、この関数の２乗を係数にもつディリクレ級数をそれぞれ D1(s), D2(s)とおく。ここで s=σ+it は複素数の変数である(σ、t は実数)。古典的なΔ(x)についての平均値理論の適用により、これらの級数はそれぞれσ>1/4 およびσ>3/2 で絶対収束していることが見て取れる。この級数について以下の解析的性質を証明した：

①D1(s)の解析接続および極での様子の解析
②D2(s)の解析接続および極での様子の解析
③約数問題の誤差項の二乗平均公式と D1(s)との関係

①は、ある種の多重級数Ｓの２種類の表示法で表示することにより証明される。

②はΔ(x)の j 乗を含むある種の広義積分 Ij(s)と D1(s)、D2(s)との差を解析することにより複素平面の一部に対しての解析接続、そのような領域における極の様子・留数等が証明される。具体的には、D2(s)-I2(s)を D1(s)-I1(s)、または関連する積分・級数で表示し、それらの解析的性質を考察する。これらの関数の性質を考察することによりまずは D2(s)-I2(s)の性質を決定する。その後 I2(s)に関して得られている結果を適用することにより D2(s)の解析的性質を決定する、という手順をとる。これらの研究においては「Δ(x)のラプラス変換公式」「約数関数についての additive divisor problem」「2 乗についての離散型平均と連続型平均の差における恒等式」等、種々の既知の平均値定理を適用することになる。なお、最後の２平均の差についての恒等式は過去において本研究代表者により得られた結果である。

③はΔ(x)の二乗平均公式における、さらなる誤差項 F(x)についての理論、通称「Lau-Tsang の公式（予想)」と今回新たに考察されたディリクレ級数 D2(s)との関係を調べた研究の結果である。この F(x)については現状では上からの評価、F(x)自身の平均値定理、オメガ評価が知られている、というのが主な結果である。Lau-Tsang の理論はこの関数に対して平均値定理を導く方法を述べた理論であるが、この理論において「F(x)の漸近公式」を考察したものが彼らの理論であり、そのとき予想された公式が「Lau-Tsang の公式」である。本研究においては、彼らの予想した公式と D2(s)の性質、特に D2(s)の留数と予想されて漸近公式中の係数との関係、D2(s)の t 方向のオーダー評価と F(x)の漸近公式との関係、すなわち、このオーダー評価とΔ(x)の二乗平均公式との関係が研究されている。

以上の①、②の類似物としてガウスの円問題における誤差項 P(x)を係数に持つディリクレ級数の解析的性質の考察も行った。

さらに、これに関連する結果として更なる解析的性質の考察を行い以下の性質も証明した：

④Δ(x)と約数関数 d(n)の積を係数に持つディリクレ級数Ｙ(s)の性質の解析
⑤Δ(x)とは異なる定義を行った約数問題の誤差項についてのディリクレ級数の考察
⑥ディリクレ級数D1(s)およびＹ(s)の t方向へのオーダー評価の考察
⑦約数関数に関連するある種の多重級数の性質の解析

④における結果は「約数関数 d(n)と約数問題の誤差項Δ(x)の積に関する和公式」についての、本研究代表者の先行する研究を元に証明されるものである。この先行する研究を元に Y(s)をζ(s)、I1(s)およびその微分、I2(s)等で表示し既存の結果を適用することにより証明される。

⑤は約数関数には誤差項の定義として２種類のものが存在する。（３）における上記の結果はその１つのものについて得られているものであるがここではそれとは別の定義において定義されている場合にディリクレ級数がその挙動においてどのような相違点があるかを考察したものである。その定義の違いはｘが整数のときに本質的に異なるものになるのだが、今考察している場合はディリクレ級数の係数の場合、すなわちｘが整数の場合であるのでその違いはディリクレ級数の定義において本質的に異なる対象の研究と位置付けられる。実際に、この定義の違いは対応するディリクレ級数の性質の違いを与

えることが証明された。例えば s=1 は D1(s)の極を与えているのだが、定義を変えると対応するディリクレ級数は s=1 では正則になるなどの違いを与えることが考察された。

⑥は約数問題の誤差項Δ(x)の二乗平均当の平均値定理、Y(s)や I2(s)の種々の性質等を用いることにより証明される。

⑦については現在多くの研究者により盛んに行われている「多重ゼータ関数についての性質の解析」と関係があり非常に興味深い結果となっている。しかしながら、今回本研究で得られた結果は今まで考察されていなかった、または、今までの理論では考察ができなかった種類の多重ゼータ関数の性質の解析を与えている、という点において特筆すべき結果であるという位置づけにある。

以上が、(３) の研究において得られた結果の解説である。本項のまとめとしてこれら（３）の結果の波及効果・この結果に対する今後の展望を述べてみる：この種のディリクレ級数の解析は現在まで行われていない、新しい設定における級数の解析であるという意味で本研究における主結果というべき問題である。この研究は「離散型平均値における新たなる理論」への足がかりになるといえるものである。なぜならばこの種の級数は離散型平均に関する「生成関数」という意味があり、今まで知られていた離散型平均値へのアプローチとは異なった方向からのアプローチが期待できる結果となっている、といえるからである。また、この研究においては「約数関数の誤差項Δ(x)にある種の振動関数を乗じた積分の解析」を行うことが重要な点になっている。この点において、上述の「振動関数を乗じた場合についての平均値定理についての考察」ということも研究されていることを強調しておく。

さらに、上記⑥および⑦は先行する研究に対し、それらにおける既存の方法だけでは得られることができない・その手法が現在まで標準的に使われてきた結果や方法だけでは解析は困難であった、という点で新しい結果である、と特筆できるものである。例えば⑥については「関数等式が証明されていないディリクレ級数に対してその非自明なオーダー評価が得られている」という点で、また、⑦については現在まででではほとんど考察が行われていないタイプの多重級数の接続を与えている、という点で稀有な結果であるといえる。これらの手法・結果が他の場合に対してすぐに適用され応用されることはまだ判断が難しい点もある。それは、他分野における平均値定理の理論がまだ整備されていない等の準備不足の点は否めないからである。しかしながら周辺分野の整備・関連する分野における平均値定理の深い考察を行うことにより他分野に対して何らかの寄与を与えることを十分に期待できる結果になっている、といえるものであると信じている。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕(計 2 件)

①Jun Furuya and Wenguang Zhai, On k-free divisor problem.II, Acta Arithmetica 132 (2008), no. 4, 351-358. (査読有り)

②Jun Furuya and Wenguang Zhai, On k-free divisor problem, Acta Arithmetica 123 (2006), no. 3, 267-287. (査読有り)

〔学会発表〕(計 1 件)

① 古屋淳、谷川好男、Zhai Wenguang : Dirichlet series obtained from the error term in the Dirichlet divisor problem、第１２０回日本数学会九州支部例会、平成２１年１月３１日、福岡大学理学部

６．研究組織
(1)研究代表者

古屋　淳（FURUYA　JUN)
沖縄工業高等専門学校・総合科学科・講師
研究者番号：10413890