

平成21年5月26日現在

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2006年度～2008年度

課題番号：18740025

研究課題名 (和文) コクセター群と非正曲率空間の研究

研究課題名 (英文) Study on Coxeter groups and spaces of non-positive curvature

研究代表者

保坂 哲也 (HOSAKA TETSUYA)

宇都宮大学・教育学部・准教授

研究者番号：50344908

研究成果の概要：

群作用のある非正曲率空間 (CAT(0)空間) の「境界」とよばれる空間の研究、および、鏡映によって生成される Coxeter 群とよばれる群の作用する Davis 複体とよばれる CAT(0)空間の境界の研究を行った。「境界」は興味深い研究対象でありながら一般に非常に複雑な構造を持つために扱うのが困難であるが、本研究では、力学系のカオス理論の考え方を導入し、研究成果を得た。また、未解決で重要な問題が残されている CAT(0)空間と CAT(0)群の asymptotic 次元とよばれる次元に関して、沖縄高専の知念直紹氏との共同研究により、研究成果を得ている。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,100,000	0	1,100,000
2007年度	900,000	0	900,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,900,000	270,000	3,170,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：位相幾何学，幾何学的群論，Coxeter 群，CAT(0)空間，CAT(0)群

1. 研究開始当初の背景

1935年に H. S. M. Coxeter によって、有限鏡映群が有限 Coxeter 群によって特徴付けられ、その後、完全に分類がなされている。一方で、無限 Coxeter 群においては、このような分類の問題をはじめ、多数の未解決問題が残されている。また、無限コクセター群は、Davis 複体とよばれる非正曲率空間 (CAT(0)空間) に幾何学的に (コンパクト・離散・等

長的に) 作用する。

CAT(0)空間は、「境界」とよばれる空間を付け加えることによりコンパクト化され、この境界は一般に非常に複雑な構造を持ち、この空間自身、興味深い研究対象である。負曲率の空間 (おおよそ Gromov の意味での hyperbolic 空間) とその境界の研究は、現在大変進んでおり、ある程度のことわかってきているのだが、その一方で、非正曲率空間 (CAT(0)空間) とその境界に関しては、

重要で未解決な問題が数多く残されている。例えば、幾何学的な群作用のある CAT(0)空間の asymptotic 次元に関する問題は、重要で未解決な問題のひとつである。

2. 研究の目的

本研究では、無限 Coxeter 群と Davis 複体とその境界、および、一般の幾何学的な群作用のある CAT(0)空間とその境界の研究を目的としている。

(1) Davis 複体および幾何学的な群作用のある CAT(0)空間の「境界」は、一般に非常に複雑な構造を持つが、その一方で、群作用の制約があるため、フラクタルのような何か規則性を持った複雑な空間のように見える。本研究では、境界のこのような規則性のある複雑な構造を捕らえるために、力学系のカオス理論と関連のある「極小性」や「攪拌集合」といった概念を導入した研究を目的とした。

(2) また、同時に CAT(0)空間の asymptotic 次元に関する問題を研究の目的としている。特に、ある程度次元の低い比較的簡単な構造を持つ CAT(0)空間の asymptotic 次元に関しても、現状では、未だよくわかっていない部分があるため、まずはそのような単純な構造を持つ CAT(0)空間の asymptotic 次元、および、その境界の被覆次元との関係を調べることを研究目的とした。

(3) また、その他、CAT(0)空間に幾何学的に作用する群 (CAT(0)群) の構造に関する研究、および、CAT(0)空間の境界の局所連結性などの性質に関する研究を目的とした。

3. 研究の方法

(1) CAT(0)空間の境界の研究に力学系の概念を導入するにあたり、筑波大学の加藤久男氏や沖縄高専の知念直紹氏などの研究者との研究交流や情報交換、議論などを行った。また、参加した研究集会等の場において、幾何学的群論の研究者や、力学系を専門とする研究者、リーマン多様体の研究者、位相幾何学の研究者等との研究交流を通して、本研究を推進した。

(2) また、CAT(0)空間の asymptotic 次元に関する研究は、沖縄高専の知念直紹氏との共同研究を主体として本研究を推進した。

4. 研究成果

(1) 幾何学的な (コンパクトで離散な) 群作用のある非正曲率空間 (CAT(0)空間) の境界の研究、および、Coxeter 群の作用する Davis 複体とよばれる CAT(0)空間の境界の研究において、興味深い研究対象でありながら一般に非常に複雑な構造を持つために扱うのが困難なこれら「境界」とよばれる空間の性質をとらえるために、本研究では、力学系のカオス理論において重要な概念である「極小性」と「攪拌集合」を、境界上の群作用に対して自然な拡張として定義し、境界の「極小性」および「攪拌集合」に関する研究成果を得た。

① 群作用の任意の軌道が稠密となる性質を「極小性」という。まず、本研究では、以前のこれまでの研究で得られていた Coxeter 群の作用する Davis 複体の境界における軌道の稠密性に関する結果を拡張した。更にその応用として、right-angled とよばれる Coxeter 群の場合について特に研究を進め、境界が極小である (任意の軌道が稠密となる) ための判定可能な必要十分条件を与えた。すなわち、「right-angled Coxeter 群の境界において、それが極小となるための必要十分条件は、right-angled Coxeter 群の任意の指数有限な部分群が 2 つ以上の無限群の積に分解しないこと」を示した。

② カオス理論において重要な概念である「攪拌集合」の拡張した概念を群作用のある CAT(0)空間の境界の研究に導入し、研究成果を得た。境界が攪拌集合となるための十分条件を得るとともに、①の研究結果との関連性から、特に、Coxeter 群と Davis 複体の境界に関して研究を進め、最終的に、right-angled Coxeter 群の場合においては、その境界が極小であることと、攪拌集合であること、そして、right-angled Coxeter 群の本質的な部分群が積に分解しないこと、これらがすべて同値であることを得た。この結果は、群の本質が無限群の積に分解しない場合の right-angled Coxeter 群の境界の複雑さをとらえている。

③ 上述の境界の ①「極小性」に関する研究成果、および、②境界の「攪拌集合」に関する研究成果では、特に、right-angled Coxeter 群の場合について、完全に目標としていた研究結果が得られた。一方で、同様の結果が、right-angled を仮定しない一般の Coxeter 群に対しても成立するのではないかという予想のもと、一般の Coxeter 群と Davis 複体の境界についても研究を行い、研究成果としては現状不完全ながらも、一定

の研究の進展がみられた。

(2) Gromov によって導入された asymptotic 次元に関する研究は、本関連研究分野において、現在、非常に活発に研究がなされている話題であるが、その中でも特に CAT(0) 空間と CAT(0) 群の asymptotic 次元については未解決で重要な問題が数多く残されている。本研究では、沖縄高専の知念直紹氏との共同研究により、手始めに、まだ知られていない単純な構造の CAT(0) 空間の asymptotic 次元を求めるため、ユークリッド平面と同相な CAT(0) 空間の asymptotic 次元に関する研究を行い、その結果、そのような CAT(0) 空間の asymptotic 次元は常に 2 であることを示した。また、同共同研究により、一般の CAT(0) 空間の asymptotic 次元とその境界の被覆次元の間の関係に関する研究も推進している。

(3) CAT(0) 空間に幾何学的に作用する群を CAT(0) 群とよぶ。例えば、Bieberbach 群や、結晶群、Coxeter 群や、コンパクトな非正曲率を持つ測地線空間の基本群などは、すべて CAT(0) 群の例である。本研究では、一般の CAT(0) 群の構造に関する研究成果を得た。すなわち、CAT(0) 群の中心が無限の場合には、CAT(0) 群は半直積で分解できることを示し、この研究成果により、一般に CAT(0) 群（およびそれが幾何学的に作用する CAT(0) 空間とその境界）を理解する上で、中心が有限な CAT(0) 群の研究が本質的であることを得た。今回得られた CAT(0) 群の構造に関する結果が、本研究分野においてどのような意義があるのか、今後の研究において、この結果を応用した更なる研究の進展が望まれる。

(4) 群が幾何学的に作用する CAT(0) 空間の境界がいつ局所連結となるのか、という問題は未解決であり、これは、群作用のある CAT(0) 空間の境界の位相の決定性の問題（幾何学的 rigidity の問題）とも関連がある。この境界の局所連結性の問題については、M. Mihalik, K. Ruane, S. Tschantz による最近の先駆的な研究成果がある。本研究では、M. Mihalik, K. Ruane, S. Tschantz の結果ほどのインパクトはないが、独自の手法により、境界が非局所連結となるための十分条件に関する研究を進展させている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

[1] N. Chinen and T. Hosaka,
Asymptotic dimension of proper CAT(0) spaces which are homeomorphic to the plane,
Canadian Mathematical Bulletin (印刷中)
査読有り

[2] T. Hosaka,
Minimality of the boundary of a right-angled Coxeter system,
Proceedings of the American Mathematical Society 137 (2009) 899—910
査読有り

[3] T. Hosaka,
Dense subsets of boundaries of CAT(0) groups,
Houston Journal of Mathematics 34 (no.4) (2008) 1057—1063
査読有り

[学会発表] (計 7 件)

[1] T. Hosaka,
On isometry groups of CAT(0) spaces,
「同相群とその周辺」研究会
2009年2月21日 京都産業大学

[2] T. Hosaka,
Minimality and scrambled sets of boundaries of CAT(0) groups,
リーマン幾何と幾何解析
2008年2月19日 筑波大学

[3] T. Hosaka,
On the boundary of a CAT(0) space on which a group acts geometrically,
リーマン面不連続群論研究集会 — Conference on Riemann surfaces and discrete groups—
2008年1月14日 岡山大学

[4] T. Hosaka,
Minimality and scrambled sets of boundaries of CAT(0) groups,
International Conference on Topology and its Applications 2007 at Kyoto,
2007年12月5日 京都大学

[5] T. Hosaka,
CAT(0) groups whose boundaries are
scrambled sets,
一般および幾何学的トポロジーの現状と諸
問題,
2007年10月18日 京都大学数理解析研究所

[6] T. Hosaka,
On minimality of the boundary of a Coxeter
system,
一般位相幾何学及び幾何学的トポロジーと
その応用
2006年10月18日 京都大学数理解析研究所

[7] T. Hosaka,
Minimality of the boundary of a
right-angled Coxeter system,
Rigidity School, Nagoya 2006,
2006年9月28日 名古屋大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者

保坂 哲也 (Tetsuya Hosaka)
宇都宮大学・教育学部・准教授
研究者番号：50344908

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし