

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2006～2008

課題番号：18740030

研究課題名（和文） 空間グラフの不変量と正則射影図の研究

研究課題名（英文） Research of invariants and regular projections of spatial graphs

研究代表者

新國 亮 (NIKKUNI RYO)

金沢大学・学校教育系・准教授

研究者番号：00401878

研究成果の概要：空間グラフのホモトピー不変量及びホモロジー不変量の研究を行ない、その結果、鏡像対称性を含む各種幾何学的対称性との関係の決定、グラフの内在的な非自明性の新種の発見、直線型空間グラフ理論への応用等の成果を得た。また、空間グラフの2次元球面への正則射影図の研究を行ない、その結果、極小非自明な空間グラフの正則射影図の最小交差点数の決定、非自明射影と呼ばれる正則射影図の最小交差点数の決定等の成果を得た。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	900,000	0	900,000
2007年度	800,000	0	800,000
2008年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,500,000	240,000	2,740,000

研究分野：位相幾何学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：空間グラフ、結び目、絡み目、不変量、正則射影図

## 1. 研究開始当初の背景

当時国際的に空間グラフ理論の主流だったのは、結び目や絡み目の内在性の研究であり、結び目理論の既知の事実とグラフ理論による組み合わせ的手法が用いられていた。しかし、空間グラフ理論のそもそもの目標は、空間グラフの分類であり、また、結び目や絡み目とは異なる現象を有することも大きな動機である。特に1990年代中盤以降、グラフの正則射影図の研究が空間グラフ研究の基礎付けに持つ意味が小さくないことが認識され、代表者は空間グラフの正則射影図に反映する、結び目や絡み目には現れ

ない特有の性質を研究し、結果を積み上げつつあった。一方、空間グラフ理論においてはグラフ各々にそれぞれの結び目理論が存在するため、それらの統一的な取扱いもまた、大きな課題であった。これらの状況を踏まえ、空間グラフの不変量と、空間グラフの正則射影図の平面的なトポロジーとの関係に着目し、特に代数的位相幾何学の観点から研究を進めるという着想に至った。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、空間グラフに特有の位相幾何学的な性質を解明することであり、具体的

には、以下の2つを柱に据えた。

(1) グラフの空間埋め込みがどれだけ存在するか、という分類問題の解決は、空間グラフ研究の大きな目標である。分類に際しては、グラフ各々にそれぞれの結び目理論があるので、統一的な取り扱いが重要なテーマとなっている。そこで、種々の同値関係による分類を、全ての空間グラフに定義でき、かつ実際に計算可能な代数的不変量によって行なう。

(2) 任意の絡み目の平面への正則射影図を、必ず自明な絡み目に持ち上げ直すことができることは良く知られており、これは絡み目の多項式不変量の理論の礎となる重要な事実である。しかし、一般に空間グラフの正則射影図においては、この事実が成り立つとは限らない。このように、結び目や絡み目には現れないが、空間グラフには起こりうる現象について調べ、その位相幾何学的な事情を明らかにする。

### 3. 研究の方法

(1) 空間グラフの Wu 不変量とは、W. T. Wu により定義された、グラフの2点配置空間のある種の同変コホモロジー類として実現されるホモロジー完全不変量であり、その特別な場合として、2成分絡み目の絡み数、及び空間5頂点完全グラフ、空間3+3頂点完全2部グラフのSimon不変量が得られる。まず、2成分有向絡み目の鏡像対称性はその絡み数に依存するというKirk-Livingstonの結果を踏まえ、一般に空間グラフの各種対称性がSimon不変量にどのように依存しているかを、ホモロジー分類及びSmith理論を用いて調べた。一方、ホモロジー不変量を用いて、空間グラフ内の結び目の型や個数を評価するという手法は、90年代終盤に本橋-谷山及び谷山-安原の研究で用いられ、以降、グラフの結び目内在性の研究に応用されてきた。そこで、この手法による新たな技術を開発し、空間グラフ内の結び目や絡み目とは限らない部分空間グラフの型や個数の評価への応用を試みた。また、結び目及び絡み目の棒指数の結果の適用により、直線型空間グラフ理論への応用を考えた。

(2) 絡み数0の2成分有向絡み目に対して定義される、Sato-Levine不変量を用いた2成分空間グラフのホモトピー不変量が、Fleming-代表者によって得られていたが、新たに、絡み数が0とは限らない2成分有向絡み目に対して定義される、一般化されたSato-Levine不変量を用いた、2成分空間グラフのホモトピー不変量の構成を考案した。

(3) 空間グラフの3次元球面における補空間の基本群は、古典的不変量としてよく知られている。この群を用いて、特に自明な空間グラフがScharlemann-Thompsonにより特徴付けられており、更にそれと同値なY. Q. Wuによる幾何的特徴付けも知られている。そこで、十分複雑な空間グラフ内に含まれる2成分非分離絡み目の探索や、ある程度小さい交点数の射影図に写る空間グラフ内の非自明結び目及び絡み目の探索に、これらの結果を駆使した。また、非平面的グラフに対し、この群が自由群となるような空間埋め込みとして、3次元球面内のHeegaard曲面上に、標準的メリディアン-ロンジチュード系との交点数が最小となるように埋め込めるものを考え、その幾何学的性質について調べた。

### 4. 研究成果

(1) 2成分有向絡み目の鏡像対称性は、その絡み数に依存することがKirk-Livingstonによって示され、また、絡み数の鏡像対称絡み目による実現性については、Livingston, Kidwellによって部分的結果が得られていた。そこで、谷山 公規氏(早稲田大学)との共同研究により、鏡像対称性を含む2成分絡み目の各種対称性と絡み数との関係を、実現問題も含めて完全に決定するとともに、更に空間5頂点完全グラフ及び空間3+3頂点完全2部グラフについて、その鏡像対称性を含む各種対称性とSimon不変量との関係を、やはり実現問題も含めて完全に決定した。

(2) 非平面的グラフにおいては、自明性の一般化としての標準的空間表現が未だ満足な形では得られていない。そこで小林 一章氏(東京女子大学)との共同研究により、非平面的グラフの新たな空間表現として極小埋め込みを導入した。この概念は、埋め込みの一意性を除いては、標準的空間グラフとして期待される性質を保有している。また、平面的グラフの正則射影は、いかなる自明空間グラフにも持ち上がらないとき非自明射影と呼ばれ、非自明射影を持たない平面的グラフは自明化可能といわれるが、極小埋め込みの概念を用いてこれらを一般化し、新たに非平面的グラフの非極小射影、及び極小化可能性の概念を導入し、幾つかの結果を得た。

(3) Fleming-代表者により、絡み数0の2成分構成絡み目のSato-Levine不変量を応用した空間グラフのホモトピー不変量が定義され、ある2成分グラフにおいて、構成絡み目が全てホモトピカルに自明であるが、それ

自身はホモトピカルに非分離な空間埋め込みの存在が示されていた。そこで新たに、絡み数が0とは限らない2成分構成絡み目の一般化された Sato-Levine 不変量を応用した空間グラフのホモトピー不変量を導入し、ある2成分グラフにおいて、ホモトピカルには同じ構成絡み目を持つ空間埋め込みのホモトピー類が無限個存在することを示した。

(4) Youngsik Huh 氏(漢陽大学)との共同研究により、高々3交点の正則射影図上に写る空間グラフは、Hopf 絡み目も三葉結び目も含まなければ、任意の部分空間グラフの3次元球面における補空間の基本群は自由群であることを示した。特に、高々3交点の正則射影図上に写る平面的グラフの空間埋め込みは、Hopf 絡み目も三葉結び目も含まなければ自明であること、また、極小非自明な空間グラフの正則射影図の交点数は、Hopf 絡み目と三葉結び目を除けば4以上であることも示された。一方、同じく Huh 氏との共同研究により、平面的グラフの非自明射影図の交点数は3以上であることを示した。

(5) グラフの絡み目内在性や結び目内在性を一般化し、グラフが内在的非自明であるとは、その空間埋め込みが必ず非自明な空間部分グラフを含むときと定義した。このとき、グラフは内在的非自明ならば2成分絡み目内在であることを示した。更に、絡み目内在性や結び目内在性とは本質的に異なる新たな内在的非自明性の例として、その空間埋め込みが必ず非分離な3成分絡み目か、もしくは既約な空間手錠グラフでその2成分構成絡み目が分離しているものを含むグラフが存在することを示した。

(6) 任意の空間6頂点完全グラフの2成分構成絡み目の絡み数の総和、及び任意の空間7頂点完全グラフの Hamilton 閉路の像として得られる構成結び目の Conway 多項式の2次の係数の総和は、いずれも2を法として1であることが知られていた(Conway-Gordon の定理)。そこで、これらの結果の整数持ち上げを与える公式を見出し、Conway-Gordon の定理を著しく精密化した。

(7) 全ての辺が線分である空間グラフを直線型といい、Alfonsin によって直線型空間7頂点完全グラフ内には必ず三葉結び目があることが有向マトロイド理論と計算機の援用により示されていた。また、Huh-Jeon により、直線型空間6頂点完全グラフ内の非自明結び目は高々1個の三葉結び目であり、三葉結び目を含むための必要十分条件は、ちょうど3つの Hopf 絡み目を含むこと、更に三葉結び目を含まないための必要十分条件は、

ただ1つの Hopf 絡み目を含むことが、やはり計算幾何学的な議論で示されていた。そこで、空間グラフのホモロジー不変量の応用により、これらの定理に計算機を用いない位相的な別証明を与えた。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計5件)

① Youngsik Huh, 新國 亮, Regular projections of graphs with at most three double points, Journal of Knot Theory and its Ramifications, 掲載決定, 査読有

② 新國 亮, Homotopy on spatial graphs and generalized Sato-Levine invariants, Revista Matematica Complutense, 掲載決定, 査読有

③ 新國 亮, An intrinsic nontriviality of graphs, Algebraic & Geometric Topology, 9巻1号, 351-364, 2009, 査読有

④ 新國 亮, Achirality of spatial graphs and the Simon invariant, Intelligence of Low Dimensional Topology 2006 (Hiroshima), Series on Knots and Everything, 40巻, 239-243, 2007, 査読有

⑤ 新國 亮, Regular projections of spatial graphs, Knot Theory for Scientific Objects, Osaka City University Advanced Mathematical Institute Studies, 1巻1号, 111-128, 2007, 査読有

[学会発表] (計12件)

① 新國 亮, Conway-Gordon の定理の精密化とその応用, 研究集会「結び目理論」, 2009. 3. 21, 東京

② 新國 亮, Knots in rectilinear spatial complete graphs and homological invariants, 研究集会「結び目の数学」, 2008. 12. 24, 東京

③ 新國 亮, An intrinsic non-triviality of graphs, AMS Sectional Meetings (2008 Spring Western Section Meeting), 2008. 5. 4, クレアモント

④ 法貴 孝哲, 新國 亮, 谷山 公規, Clasp-pass moves on spatial handcuff graphs, AMS Sectional Meetings (2008

Spring Western Section Meeting), 2008. 5. 4,  
クレアモント

⑤ Youngsik Huh, 新國 亮, On spatial graph diagrams with at most three crossings, The Fourth East Asian School of Knots, Links and Related Topics, 2008. 1. 22, 東京

⑥ Youngsik Huh, 新國 亮, On spatial graph diagrams with at most three crossings, 研究集会「結び目のトポロジーX」, 2007. 12. 23, 東京

⑦ 新國 亮, Homotopy on spatial graphs and generalized Sato-Levine invariants, Knotting Mathematics and Art, 2007. 11. 4, タンパ

⑧ 新國 亮, Homotopy on spatial graphs and generalized Sato-Levine invariants, Intelligence of Low Dimensional Topology 兼 拡大K00Kセミナー, 2007. 8. 31, 大阪

⑨ 新國 亮, 谷山 公規, Symmetries of spatial graphs and Simon invariants, Third East Asian School of Knots, Links and Related Topics, 2007. 2. 5, 大阪

⑩ 小林 一章, 新國 亮, グラフの極小化可能性と一般化された非自明射影について, 研究集会「結び目のトポロジーIX」, 2006. 12. 20, 東京

⑪ 新國 亮, 谷山 公規, Symmetries of spatial graphs and Simon invariants, 研究集会「結び目のトポロジーIX」, 2006. 12. 19, 東京

⑫ 新國 亮, Achirality of spatial graphs and the Simon invariant, Intelligence of Low Dimensional Topology 2006, 2006. 7. 23, 広島

[その他]

ホームページアドレス  
<http://www.lab.twcu.ac.jp/nick>

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

新國 亮 (NIKKUNI RYO)  
金沢大学・学校教育系・准教授  
研究者番号：00401878

### (2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者  
なし