

平成 21 年 5 月 25 日現在

研究種目：若手研究(B)

研究期間：2006 ~ 2009

課題番号：18740031

研究課題名（和文）ホモトピー論における局所的性質と大域的性質の研究

研究課題名（英文）Local and global structures in homotopy theory

研究代表者 岸本大祐 (KISHIMOTO DAISUKE)

京都大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：60402765

研究成果の概要：空間を局所化して得られる性質に関して、非単連結なリー群の mod p 分解や、リー群の局所化による積構造の変化を研究した。その応用としてあるリー群の自己ホモトピー集合のなす群のベキ零類が非常に大きいことを示した。空間がもつ局所化に関して不変な性質に関して、4次元球面上のインスタントンモジュライ空間内の特殊な軌道空間が、Bott による generating variety の 3重ループ空間版や実とシンプレクティックの場合の周期性を与えることを示した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,000,000	0	1,000,000
2007年度	900,000	0	900,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	2,800,000	270,000	3,070,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・幾何学

キーワード：幾何学、トポロジー

1. 研究開始当初の背景

空間の局所的性質に関して、単連結なリー群の局所化によるホモトピー型の変化に関しては J.-P. Serre による古典的な結果が存在するが、単連結でない場合や、積構造の変化に関する研究結果は存在しなかった。また、

積構造に関しては素数 p に関する単調性が期待されていた。空間の大域的性質に関して、Bott 周期性の証明は多くの種類が存在する。その中でもインスタントンのモジュライ空間を用いた証明は複雑であり、幾何学的な意味が不明であった。

2. 研究の目的

空間の局所的な性質に関しては、非単連結なリー群の $\text{mod } p$ 分解を与え、その応用として射影ユニタリー群の自己ホモトピー群に関して研究する。また、局所化によるリー群の積構造の変化をホモトピー冪零性を用いて求める。空間の大域的な性質に関しては、Bott 周期性の証明をインスタントンモジュライ空間内の軌道空間を用いることにより与える。また、その応用としてモジュライ空間のホモトピー型について研究する。

3. 研究の方法

上記の研究において共通して現れるのはリー群の交換子写像である。当然、この交換子写像はリー群の積構造を知る上では重要である。局所的な性質に関しては、射影ユニタリー群の交換子写像を具体的にコホモロジー上で計算し、 $\text{mod } p$ 分解により与えられた写像との合成を考えることにより、射影ユニタリー群の冪零類がその階数以上であることを示した。また、局所化による積構造の変化に関しては考えているリー群への写像のホモトピー類のなす群において交換子の分解を行うことにより、交換子写像の分解をまず与え、後は球面のホモトピー群の情報などを用いてホモトピー冪零性を決定した。大域的な性質に関しては4次元空間のインスタントンの基点付きモジュライ空間にその構造群を作用させ、特殊なインスタントン上の軌道空間と構造群の $SU(2)$ に同型な部分群の中心化群による商空間とが等しくなることをまず示した。その後、インスタントンのモジュライ空間から、構造群の3重ループ空間と同一視できる接続のモジュライ空間への包含写像を上記の軌道空間に制限すると、構造群の交換子写像で表さ

れることを示した。古典群に対して具体的に $SU(2)$ と同型な部分群を与えることにより上記の写像の列を構成し、それらが構造群の3重ループ空間に対する1重ループ空間の場合の generating variety の類似となっていることを示した。これにより、上記の写像の列の極限が Bott 周期性を与えることを示した。

4. 研究成果

与えられた空間のホモロジー群やホモトピー群の係数に関する局所化を空間のレベルで行うことができ、これを空間の局所化という。局所化は空間のホモロジー群やホモトピー群の $\text{mod } p$ 成分を扱うことが容易になることに加えて、元の空間ではできない操作を行うことを可能にする。このようにして得られる空間の性質を局所的性質といい、私はこれに関してリー群の $\text{mod } p$ 分解や、局所化によるリー群の積構造の変化についての結果を得た。具体的には非単連結なリー群を素数 p で局所化したときにいくつかの空間の直積となることを示し、その応用として射影ユニタリー群の自己ホモトピー群が大きな冪零類をもつことを証明した。上記の空間の分解は単連結なリー群に関しては古典的に知られており、素数 p を大きくするにつれ直積の因子が単純になる、つまり、リー群のホモトピー型が単純になることが知られていた。したがって、自然な疑問として積構造も素数 p を大きくすると単純になることがあげられる。私はこの疑問をホモトピー冪零性という通常の群の冪零性のホモトピー版を用いて考察した。その結果、積構造の単純性に関しては素数 p に関して単調ではないことがわかった。

上記の局所的性質とともに考えなければな

らないのは空間そのものがもつ大域的な性質である。大域的な性質に関しては、4次元球面のインスタントンのモジュライ空間内の特殊な軌道空間を考えることにより Bott 周期性の新しい証明を与えた。この軌道空間は構造群の $SU(2)$ に同型な部分群の中心化群での商空間となっており、接続のモジュライ空間への包含写像をそこに制限すると構造群の交換子写像で表されることを示した。これは R. Bott がモース理論を用いて与えた Bott 周期性の証明や generating variety の存在の高次元化と考えられる。実際上記の写像はリー群の 3 重ループ空間の generating variety の類似となっており、その極限は Bott 周期性と同じホモトピー同値を与えることがわかった。これは Bott 周期性の新証明でもある。この結果と Atiyah-Jones 定理を組み合わせることによりモジュライ空間のホモトピー型に関する結果を得た。また、ゲージ群を含むある種の群拡大の分解を随伴束の自明性や構造群の高次ホモトピー可換性などと関連づけることに成功した。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計7件)

1. D. Kishimoto and S. Kaji, Homotopy nilpotency in p -local loop spaces, Math. Z. 2009 掲載予定, 査読有
2. D. Kishimoto, Homotopy nilpotency in localized $SU(n)$, Homology, Homotopy and Applications, 2009 掲載予定, 査読有
3. Y. Kamiyama and D. Kishimoto, Spin structures on instanton moduli spaces, Topology

and its Applications, 2009 掲載予定, 査読有

4. D. Kishimoto and A. Kono, Mod p decompositions of non-simply connected Lie groups, J. Math. Kyoto Univ. 48 (2008), no. 1, 1-5, 査読有

5. Y. Kamiyama, D. Kishimoto, A. Kono and S. Tsukuda, Samelson products of $SO(3)$ and applications, Glasg. Math. J. 49 (2007), no. 2, 405-409, 査読有

6. D. Kishimoto, L-S category of quaternionic Stiefel manifolds, Topology Appl. 154 (2007), no. 7, 1465-1469, 査読有

7. H. Hamanaka, D. Kishimoto and A. Kono, Self homotopy groups with large nilpotency classes, Topology Appl. 153 (2006), no. 14, 2425-2429, 査読有

6. 研究組織

(1) 研究代表者

岸本大祐 (KISHIMOTO DAISUKE)

京都大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：60402765