様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　２１年　６月　２日現在

研究種目：若手研究（B）
研究期間：2006～2008
課題番号：１８７４００３２
研究課題名（和文）　非安定 K 理論とリー群のホモトピー的巾零性

研究課題名（英文）　unstable K-theory and homotopy-nilpotency of Lie groups

研究代表者
濱中 裕明（HAMANAKA HIROAKI）
兵庫教育大学 大学院 学校教育研究科・准教授
研究者番号：２０２９４２６７

研究成果の概要：群という代数的な構造と、図形としての構造を併せ持つリー群では、その代数的な構造を幾何的に考察するという興味深い研究課題が成り立つ。例えばユニタリ群のように行列を要素とする集合の群では、一般に積の順番を入れ替えると結果が変わってしまう（代数的性質：非可換性）が、このことは2つの行列 A と B に対して、その交換子 $ABA^{-1}B^{-1}$ が単位行列にならないことを意味する。しかし個々の行列ではなく、２つの行列から交換子への写像として捉えると、この写像を連続的に変形して常に単位行列になるようにできるかという問題（位相幾何的性質：ホモトピー可換性）になる。本研究では、ユニタリ群等について、このホモトピー可換性をさらに拡張したホモトピー巾零性について研究した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	1,100,000	0	1,100,000
２００７年度	500,000	0	500,000
２００８年度	500,000	150,000	650,000
年度			
年度			
総　計	2,100,000	150,000	2,250,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・幾何学
キーワード：位相幾何、ホモトピー論、リー群、ホモトピー可換、巾零性、Samelson 積

１．研究開始当初の背景

本研究を開始する以前から、リー群などの位相群に対して、その代数的構造を位相幾何的、ホモトピー論的に研究することを行っていました。特に、I.M.James と E.Thomas による古典的な結果である「SO(n)と SO(m)はいつ SO(n＋m－1)のなかでホモトピー可換か」という問題に対する部分的な解決に、より強い結果を与えるなど、ホモトピー可換性を中心に研究をおこなってきました。リー群における可換性というのは、リー群の交換子写像が定値写像であることに他なりません。これを「交換子写像が定値写像にホモトープ

（連続的に変形できる）」という条件に変更したものが、ホモトピー可換性です。ところで、空間 X に対して、X からリー群 G への写像のホモトピー類は G の群構造に起因して、自然な群の構造を持ちます。すると、この群のなかで、交換子写像がどの程度単位元と異なるか、つまり、交換子写像の位数を考えると、ホモトピー非可換性の大きさを考察できると気付きました。以来、特に指定した空間 X からユニタリ群への写像のホモトピー類の成す群を非安定 K 理論と定義し、研究を進めてきました。

一方、上記のホモトピー類の成す群の特別な場合として、リー群 G から G への写像の成す群は自己ホモトピー群として、以前から国内外の研究者により研究が進められています。また、群の可換性・非可換性を、拡張した概念である巾零性に関して、これをリー群にホモトピー的に適用した「ホモトピー巾零性」という概念も広く調べられています。特にこれに関連して、茨城大の大嶋は「連結な単純リー群 G に対して、自己ホモトピー群の巾零性のクラスは、リー群の rank 以上である」という大胆な予想を立て、少しずつ肯定的な結果を集めています。

２．研究の目的

上に述べたように私の研究テーマはリー群のホモトピー的な非可換性です。リー群のホモトピー的な非可換性は、リー群の交換子写像のホモトピー類としての性質や、ある空間Xからリー群への写像のホモトピー類の成す群の巾零性などに見ることができます。つまり リー群の積という代数構造を トポロジー的（ホモトピー的）に研究するということです。本研究課題では 特に古典型リー群に関して、「非安定K理論」という手法でリー群のホモトピー的な巾零性を調べ、またその応用を図りたいと考えました。

U(n)をユニタリ群とします。代表的な一般コホモロジー理論として、K-理論がありますが、空間 X に対して、$K^0(X)$、$K^1(X)$は それぞれホモトピー集合の群[X, Ω U(∞)]、[X,U(∞)]と同値です。このことから 空間 X に対して、群 [X, Ω U(n)]や[X,U(n)]を対応させる関手は非安定 K 理論と考えることができます。(n を十分大きくすると 通常の K 理論となる。)K-理論では得られる代数が 可換ですが、ここで考える非安定 K^1 理論は一般に非可換で、この非可換性は U(n)のホモトピー的な強い非可換性を示しています。それにより、非安定 K^1 理論は空間 X の情報を 通常の K 理論よりも強く反映しています。X の次元が 2n 未満の時は [X,U(n)]は $K^1(X)$に等しくなりますが、2n 次元以上の時の[X,U(n)]は $K^1(X)$の部分群を複数回 中心拡大した群となります。この拡大は K 理論上の高次のコホモロジー作用素で記述できることが分かってきました。その他、Adams の e-不変量との関わりや興味深い性質が いくつか判明しています。本研究では、より高次の空間 X について 非安定 K 理論の記述、決定を押し進め、また X の次元が上がるにつれて 非安定 K 理論の巾零性がどう変化していくかを調べることにより U(n)のホモトピー巾零性の高さを明らかにしたいと計画しました。

さらに、同様の手法を 直交群 SO(n)やシンプレクティック群 Sp(n)等へも適用し、非安定 KO 理論、非安定 KSp 理論を構築し、互いに相関させながら 理論を発展させ、この手法で古典型リー群のホモトピー的な非可換性を調べるというのが本課題の目的です。

また、この非安定K理論の具体的な応用としては、ゲージ群のホモトピー型の分類、古典群のセルフホモトピー群の巾零指数の決定、直交群のホモトピー可換性の問題等が挙げられます。

３．研究の方法

(１) 非安定 K 理論：

非安定 K^1 理論[X,U(n)]を研究の中心的なテーマの１つにすえています。 非安定 K^1 理論[X,U(n)]は X の次元が 2n 未満のときはよく知られた通常の K^1 理論と一致し、X の次元が 2n のときは 非可換の場合が現れます。さらに一般に X の次元がより高次の場合、[X,U(n)]は K^1(X)の部分群を複数回中心拡大した群になり、これらは高次のコホモロジー作用素で記述され、２次の作用素の辺りまでは 具体的な記述及び計算結果をすでに得ていますが、これを直接取り扱うことは困難です。そこで素数 p で空間を局所化することが有効になります。局所化することにより、空間がホモトピー論的には簡単になり、扱える X の次元が高くなります。

(２) 非安定 K 理論の応用：

非安定 K 理論の応用としては 様々なものがあるのですが、そのなかでも成果が期待できるものとしてゲージ群のホモトピー型の分類が挙げられます。 M.C.Crabb 及び W.A.Sutherland により、底空間 B とリー群 G を固定して、B 上のすべての G-主束 P を考えたとき、P に付随するゲージ群 G(P)のホモトピー型は有限種であることが示されていますが、これの具体的な例として ４次元球面 S^4上の SU(n)-束に付随するゲージ群のホモトピー型の分類(特に n=3 の場合は 完全な分類)について 非安定 K 理論が有効に働きます。さらに S^6等別の空間上のゲージ群についても 同様に有効であることが分かっており、高次元空間上の非安定 K1 理論の記述方法を構築することと、ゲージ群のホモトピー型分類定理の間には深い関連があることが分かりました。

(３) リー群の巾零性と Samelson 積：

リー群の非可換性、巾零性の高さを調べるには Samelson 積が欠かせません。Samelson 積は、交換子写像を用いて定義されるホモトピー群の元の間の演算で、定義から自然にリー群の非可換性、巾零性を反映することが分かります。局所化の手法と非安定 K 理論を用いて、高次の Samelson 積を決定し、リー群の非可換性、巾零性の高さを調べました。

４．研究成果

(１)非安定 K 理論の巾零性

空間 X からユニタリ群 U(n)への写像のホモトピー群が非安定 K 理論ですが、上で述べたように X の次元があがるにつれて、その群は複雑になっていきます。では、空間 X の次元を１つ定めたとき、どの程度の複雑さ、つまり、どの程度の巾零性の群が非安定 K 理論として現れるのでしょうか。これについて、次の結果を得ました。

定理：

①X を 2n+1 次元の任意の有限 CW 複体とするとき、
・ｎが奇数なら nil[X,U(n)]の最大値は２
・ｎが偶数なら nil[X,U(n)]の最大値は３

②X を 2n+2 次元の任意の有限 CW 複体とするとき、
・ｎが奇数なら nil[X,U(n)]の最大値は３
・ｎが８の倍数のとき、nil[X,U(n)]の最大値は４
（ただし、nilＧは群Ｇの巾零性クラスを表す）

このように X の次元があがるにつれて、非安定 K 理論の巾零性はどんどん高くなります。そのため、素数による局所化を行わないと、X の次元に従って非安定 K 理論の扱いは急激に難しくなります。

(２) 非安定 K 理論の応用

非安定 K 理論の応用として、ゲージ群のホモトピー型の分類を行いました。その論文として、②および⑥があります。上の３．研究の方法で述べたように、底空間 B とリー群 G を指定して、B 上の主 G 束をすべて考えたと

き、主G束に付随するゲージ群のホモトピー型を分類する問題です。

４次元球面S^4上の主 SU(n)束は、第２Chern類によって分類されます。そこで第2 Chern 類が生成元の k 倍であるような主SU(n)束を$P_{n,k}$とおきます。また、$P_{n,k}$に付随するゲージ群を$G(P_{n,k})$とおきます。このとき、次の結果を得ました。

定理：
① $G(P_{3,i})$と$G(P_{3,j})$が同じホモトピー型であることと、$GCD(i,24)= GCD(j,24)$となることは必要十分である。

②$G(P_{n,i})$と$G(P_{n,j})$が同じホモトピー型であれば、次が成り立つ。

$$GCD(i, n(n^2-1))= GCD(j, n(n^2-1))$$

(ただし、GCD(x,y)は x と y の最大公約数を表す。)

(３) Samelson積とホモトピー巾零性

Samelson 積はホモトピー群の元の間の演算ですが、例えば古典群であるユニタリ群であっても、その高次のホモトピー群については、群構造は分かっているものの、具体的な生成元などが分かっていないため、Samelson積の計算などが困難でした。そこで非安定 K 理論を援用して、ホモトピー群の生成元を定め、具体的にSamelson積や一般Samelson積を計算することにより、３つの元の多重Samelson積、多重一般Samelson積で０とはならない組み合わせを発見し、次の結果を得ました。

定理：
ｎが 4 以上のとき、SU(n)の自己ホモトピー群の巾零性のクラスは3以上である。

また、局所化したときの巾零性として、次を得ました。

定理：
ｎを素数ｐの倍数とする。このとき、次のいずれかが満たされるなら、SU(n) をｐで局所化しても自己ホモトピー群の巾零性のクラスは3以上である。

・ｐが7以上である。
・ｐが5、かつ、$n = 0$ or $1 \mod 4$
・$n \leqq p \leqq 3n/2 - 2$

上記の結果は、従来、個々の有限のケースを当たるしかなかった茨城大の大嶋氏の予想に関連して、重要なインパクトがあったと思います。またこれに続いて、京都大学の岸本氏等により、さらに関連する研究が進められています。

また、ユニタリ群以外にも直交群やシンプレクティック群に関しても、いくつかの結果を得ました。例えば、直交群に関する結果は以下の通りです。

SO(2n)は次のような2n-1次のホモトピー群の生成元αを持っています。このαという元はSO(2n-1)のホモトピー群の元からは起因せず、また、SO(2n+1)へ送ると０に成ってしまいます。そのため、Samelson積などの計算において大変扱いにくいものとなっています。このたび、この元に関しても非自明なSamelson積の結果を得、次の定理を得ました。

定理：ｐを奇素数とする。このとき、次の条件は同値。
・ｐで局所化したSO(2n)の自己ホモトピー群は可換。
・$p \leqq 4n - 5$

(４)今後の展開

最後に、現在まだ論文にまとめている途中ですが、本研究で分かってきたユニタリ群U(n)の高次（2n≦次元＜4n）のホモトピー群の間のSamelson積について、現在までで分かった情報を集約するうちに、一見、扱いが不可能なほどに複雑に見えたホモトピー群にきれいなパターンが見えるようになってきました。そこには、A.T.Lundellの定義した非安定Bott周期性が絡んでいるようにも見えます。今後の展望としては、この非安定Bott周期性との関連について探ってみたいと思います。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計７件）

①濱中 裕明、鍛治 静雄、河野 明、
"Samelson products in Sp(2)"、
Topology and its Applications、
No.155　pp.1207－1212、平成 20 年(2008)、
査読有

②濱中 裕明、河野明、
"Homotopy type of gauge groups of SU(3)-bundles over S^6"、
Topology and its Applications、
No.154 pp.1377－1380、平成 19 年(2007)、
査読有

③濱中 裕明、
"Nilpotency of unstable K- theory"、
Topology and its Applications、
No.154 pp.1368－1376、平成 19 年(2007)、
査読有

④濱中 裕明、河野明、
"A note on the Samelson product in p*(SO(2n)) and the group [SO(2n),SO(2n)]"、
Topology and its Applications、
No.154　pp.567－572、平成 19 年(2007)、
査読有

⑤濱中 裕明、
"On Samelson product in p-localized unitary groups"、
Topology and its Applications、
No.154　pp.578－583、平成 19 年(2007)、
査読有

⑥濱中 裕明、河野明、
"Unstable K1-group and homotopy type of certain gauge groups"、
Proceedings of the Royal Society of Edinburgh、
No.136A pp.149－155、平成 18 年(2006)、
査読有

⑦濱中 裕明、岸本大祐、河野明、
"Self homotopy groups with large Nilpotency classes"、
Topology and its Applications、
No.153 pp.2425－2429、平成 18 年(2006)、
査読有

〔学会発表〕（計２件）

①濱中 裕明、
"Samelson products in π*(U(n)) in the meta-stable range"、
ホモトピー論シンポジウム（高松)、
平成 20 年(2008)12 月 6 日

②濱中 裕明、
"p-localized unstable K-theory with nilpotency class 3"、
International Conference on Algebraic Topology (中国/河南大学)、
平成 18 年(2006)10 月 16 日

６．研究組織
(1)研究代表者
濱中 裕明 (HAMANAKA HIROAKI)
兵庫教育大学・大学院学校教育研究科・准教授
研究者番号：２０２９４２６７

(2)研究分担者

(3)連携研究者