

平成 21年 4月 24日現在

研究種目： 若手研究 (B)  
研究期間： 2006~2008  
課題番号： 18740041  
研究課題名 (和文) 拡散過程の古典力学系による導出

研究課題名 (英文) Deriving Diffusion Processes from Newtonian Mechanics

研究代表者

梁 松 (LIANG SONG)  
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授  
研究者番号：60324399

研究成果の概要： 一定の初期条件に従う無限個の原子を含む理想気体と呼ばれる環境に分子を入れ、原子達と分子達間の相互作用は古典力学に従うという系について、分子達の挙動を考える。一定の条件の下で、解の一意存在性、そして原子達の質量が0に収束するときの収束性及びその収束先を研究した。本研究の一番のポイントは、原子達が独立であるという今までよく使われていた不自然な仮定を課さないことである。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,100,000	0	1,100,000
2007年度	1,000,000	0	1,000,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	3,100,000	300,000	3,400,000

研究分野：確率論

科研費の分科・細目：数学一般 (含確率論・統計数学)

キーワード：確率論

#### 1. 研究開始当初の背景

拡散過程は、理想気体 (一定の初期分布に従う無限個の“原子”) 環境にある大きい物体 (“分子” と呼ぶ) の動きを表すモデルとしてよく使われている。なぜならば、直感的には、分子はたくさんの原子 (質量  $m$  が分子と比べ極端に軽い) に作用され、もし各作

用が独立であると仮定できるならば、独立同分布な確率変数の中心極限定理により、分子の挙動を拡散過程とみなせるからである。

ここでの原子達の独立性というのは、時間ごとの独立性も異なる時間に関する独立性も含まれている。

しかし、現実的には、相互作用を考慮に入れたときの原子達の分布が元の分布と異なるのは自明であり、分子と一度相互作用した原子が再び分子と相互作用することもあり得るので、分子に作用する各原子が独立同分布であるというのは正しくない。

厳密的には、分子を入れる前の原子環境は一定の確率分布に従い、原子と分子間の相互作用が古典力学の運動法則に従うとし、原子の質量  $m$  が 0 に収束するときの分子の挙動を議論することが必要である。

この問題は、1971 年に Holley によって初めて提出され、1 次元の、即ちすべての粒子は一次元で動く場合に関して研究された。その後、Durr-Goldstein-Lebowitz、Calderoni-Durr-Kusuoka 等により、一般次元数の場合に拡張された。しかし、いずれの研究も、分子が一個のみで、しかも粒子間の相互作用は衝突によるものだけである、即ち束縛条件を考えなくて済むという設定の下で問題を議論した。

このように、分子は複数あり、粒子間の相互作用がポテンシャルにより与えられる場合については、重要な問題ではあるが、まだ研究されていない。

## 2. 研究の目的

本研究の目的は、上述のように、一定の初期条件に従う無限個の原子を含む理想気体と呼ばれる環境に分子を入れ、原子と分子間の相互作用が古典力学の運動法則に従うという系に関して、分子達の挙動を研究する。具体的には、分子達と原子達の間相互作用はポテンシャルにより与えられる場合について考え、まず、系の挙動を表す微分方程式

の解の存在性及び一意性を示す。続いて、原子達の質量  $m$  が 0 に収束するときの分子達の状態、即ち位置と速度、が収束することを示し、収束先の確率過程を具体的に求めることである。

ここで、特に重要なのは、分子達に作用する原子達に関して、独立性という不自然な条件を課さずに、分子の挙動を議論することである。

## 3. 研究の方法

本研究において、主に以下のアイデア・手法が使われた：

解の一意存在性を証明するに当たり、一番の難点は、分子達に影響し得る原子の個数が無限個あることである。実は、分子達に影響し得る原子の個数が有限であれば、解の存在性及び一意性は自明である。そこで、レイ分解及び分子達の速度により定められるストップピング・タイムを考察することにより、該当問題を有限個の場合に帰着し、最終的にストップピング・タイムがほとんど至る所で無限大に行くことを証明することにより、問題を解決した。

また、原子達の質量が 0 に収束するとき、分子達の状態（位置と速度）の分布の極限を求める問題に関して、二つのステップに分けた：まずタイト性を示し、タイト性を証明できてから、次のステップとしてそれを用いて収束先を具体的に求める。

タイト性を証明するとき、一番の難点は、原子達も分子達も同時に動いているので、系の動きを表す微分方程式が非常に複雑であり、解析が難しい。この問題の解決策として、原

子達の挙動を、分子達が動いていない時のもので近似し、この近似の精密な誤差評価も具体的に与えたのがポイントである。この近似により、考える常微分方程式が元の方程式より簡潔なものとなり、具体的な性質を議論することが可能になった。

上述の近似により、分子達の状態を表す過程を“マルチンゲール項（ジャンプ可）＋ドリフト項＋十分小さい剰余項”と分解できた。ここで、この分解の各項について、時間に関する連続性に拘らなかったのもポイントの一つである。

タイト性を証明できてから、それを用いて収束先を求めた。具体的には、マルチンゲール問題理論を用いることにより、確率過程の分布の収束という扱いにくい問題を、関数に代入したときの、マルチンゲール項以外の収束、という元々の問題と比べれば議論しやすい問題に帰着できた。

また、具体的な収束先を求めるときは、タイト性の証明で得られた“マルチンゲール項（ジャンプ可）＋ドリフト項＋十分小さい剰余項”という分解の具体的な形において、各項に対するさらに精密な評価が必要であったが、そのとき、確率論の種々の収束定理が使われた。

#### 4. 研究成果

本研究の成果として、研究目的にしていた問題を予定通り解決した。

具体的には、原子達と分子達との相互作用がポテンシャルにより定められる古典力学の運動法則に従い、分子を入れる前の原子環境は一定の確率分布に従うという問題設

定の下で、系の挙動を表す微分方程式の解の確率 1 の存在性、一意性を示し、原子の質量  $m$  が 0 に収束するときの分子の挙動を調べた。

特に、

- (1) 分子が一つの場合、その状態を表す確率過程の分布は拡散過程に収束することを示し、拡散過程の生成作用素の具体的な形を与えた；
- (2) 分子が複数ある場合については、ある停止時刻までに関して、上記と同様な結果を示した；
- (3) 二つの異種類な分子という特別な場合に関して、任意時刻までに結果を一般化できた。

#### 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 6 件)

- ① S. Albeverio and S. Liang, A remark on the nonequivalence of the time-zero  $\phi_3^4$ -measure with the free field measure, Markov Processes and Related Fields, Volume 14, Issue 1 (2008), 159--164, 査読有り
- ② S. Kusuoka and S. Liang, A mechanical model of Markov processes, RIMS Kokyuroku Bessatsu B6 (2008), 167--176, 査読有り
- ③ S. Liang, Nobuaki Obata and Shuji Takahashi, Asymptotic spectral analysis of generalized Erdos--Renyi random graphs, Banach Center publications, institute of Mathematics, Polish Academy of Sciences, Warszawa, volume 78 (2007), 211--229, 査読有り
- ④ S. Albeverio and S. Liang, A note on the renormalized square of free quantum fields in space-time dimension  $d \geq 4$ , Bulletin des

Sciences Mathématique, Volume 131,  
Issue 1 (2007), 1--11, 査読有り

- ⑤ S. Albeverio, S. Liang and B. Zegarlinski, Remark on the integration by parts formula for the  $\phi_3^4$ -quantum field model, Infinite dimensional analysis, quantum probability and related topics, Vol. 9, No. 1 (2006), 149-154, 査読有り

## 6. 研究組織

### (1) 研究代表者

梁 松 (LIANG SONG)

筑波大学・大学院数理物質科学研究科・准教授

研究者番号：60324399

