様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年６月１８日現在

研究種目：若手研究（B）
研究期間：2006～2008
課題番号：18740043
研究課題名（和文） ギンツブルグ・ランダウ方程式の渦糸解について

研究課題名（英文） On the vortex solutions for Ginzburg-Landau Equations

研究代表者
笠井 博則（KASAI HIRONORI）
福島大学・共生システム理工学類・准教授
研究者番号：20344822

研究成果の概要：
・磁場つきの Ginzburg-Landau 方程式の解に対して、gauge によらない幾つかの量の各点における値の大小関係を領域が凸の場合について得た。
・磁場なしの Ginzburg-Landau 方程式の渦点の生成・消滅現象の数値計算とこれらの現象が生じる幾つかの必要条件および十分条件を得た。渦点の生成・消滅現象がエネルギーの増加なしに起きることを確認するために、離散化したエネルギー汎関数の値が厳密に単調減少する計算スキームを作った。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合 計
２００６年度	500,000	0	500,000
２００７年度	500,000	0	500,000
２００８年度	400,000	120,000	520,000
年度			
年度			
総 計	1,400,000	120,000	1,520,000

研究分野：非線形偏微分方程式
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：Ginzburg-Landau 方程式，渦糸解，拘束条件付の数値計算，渦点の生成消滅

１．研究開始当初の背景

本研究では、磁場つき及び磁場なしの Ginzburg-Landau 方程式での渦糸解の性質を調べることを目標とした。

（１）これまで、磁場つきの Ginzburg-Landau 方程式の解の存在・一意性が示され、時間発展問題での時間無限大での解の漸近収束は知られていたが、その収束速度は知られていなかった。 実際に解の収束速度を知るためには、収束先の定常解の性質を知ることが重要である。 筆者は解の近傍での Ginzburg-Landau エネルギーの評価をゲージ対称性に着目して行うことで、あるパラメータ領域で自明解（完全超伝導または通常状態に対応する解）を摂動させた解に対してその収束速度を評価することができた。

この結果の渦糸解へ応用を考えるためには実際に渦糸解を構成しその性質を調べる必要があった。

渦糸解の構成の方針を検討する中で、方程式のゲージ対称性を活かすために、ゲージ不変性を持つ微分作用素に対するベクトル解析の公式を導出した。その課程で渦糸解の近似解の構成には，いわゆる重ね合わせ（線形和）だけではなく、積の形を用いて表すメリットが大きいことを得ていた。

(2) 磁場なしの Ginzburg-Landau 方程式については多くの研究がなされ、特に Brezis らの単連結有界領域での、境界条件として境界での degree を与えた際の渦糸解の特徴づけは自然で基本的な結果であった。

数値計算で定常状態や時間発展の渦糸解を計算した例は多く知られていた。理論による渦点の対消滅についてはエネルギーの単調減少性による証明で、具体的に何が起きているかを直接説明したものではなかった。

２．研究の目的

(1)磁場つきの Ginzburg-Landau 方程式の渦糸解の構成と解の性質

未知関数である、オーダーパラメータ、ベクトルポテンシャルをいくつかの関数の和や積の形で表したときに、整理した形に書き下すことが出来ることができる。このことを利用し複数の渦糸を持つ解を近似・解析する。

特に空間２次元および空間３次元での解の外部磁場や境界条件と渦糸解の関係、安定性、について調べることを目的とする。

(2)磁場なしの Ginzburg-Landau 方程式の渦の対消滅現象の理解

（その後、穴の空いている領域で、Dirichlet 境界条件を与えることで渦点の生成現象が起きることを数値的に見つけ、この解析も併せて行うことにした。）

渦点が生成・消滅するときに何が起きているかを調べ、これらの現象が起きるための必要条件または十分条件を調べる。

３．研究の方法

(1)磁場つきの Ginzburg-Landau 方程式の渦糸解の構成と解の性質

空間２次元の問題では、渦糸解の構成は渦点を中心とした関数を基本として解を構成することになるが、空間三次元の渦糸解の構成のためには零点集合として曲線を考慮する必要がある。縦に長い柱状領域の場合は零点集合を直線で近似しても良いが、一般の領域では曲線座標による関数と微分作用素の書き換えが必要になる。この問題で近似解を構成するためには、領域の形状と外部磁場に対して、零点集合の曲線を近似する部分が本質的な困難になっている。

(2)磁場なしの Ginzburg-Landau 方程式の渦の対消滅現象の理解

より精度の高い数値計算を行い、その結果に基づき、渦点の生成・消滅のための命題をつくり、証明をする。

① 渦点は解である複素数値関数の零点なので、その挙動は解の実部と虚部の零点集合（零等高線）の動きによる。今回の渦点の対消滅の理解では実部と虚部の零等高線の動きを方程式から導出し、その性質を利用した。

②渦点の生成現象はエネルギーの増加を伴わずに相転移が起きることになり、数値計算を行う際に「厳密にエネルギーが増加しない」計算スキームであることが必要になる。そのため、離散変分法を複素数値の非線形偏微分方程式に適応し「厳密にエネルギーが増加しない」ことを証明した上で計算を行った。この研究では実部・虚部の等高線の挙動が精密に追える精度の高い計算が必要になる。そ

の計算手法の開発も研究の重要な一部である。

（３）福島応用数学小研究会を平成 18 年度および平成 20 年度に開催し、それぞれ講演をお願いし、講演後ディスカッションを行った。この研究会では非常に有意義な意見交換があった。

４．研究成果

(1))磁場つきの Ginzburg-Landau 方程式の渦糸解の構成と解の性質

平成 18 年 9 月に行われた研究集会 First Slovak - Japan workshop on Computational Mathematics と Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2006 において「Some gauge invariant estimates for Ginzburg-Landau equations」というタイトルでそれぞれ 35 分講演を行った。

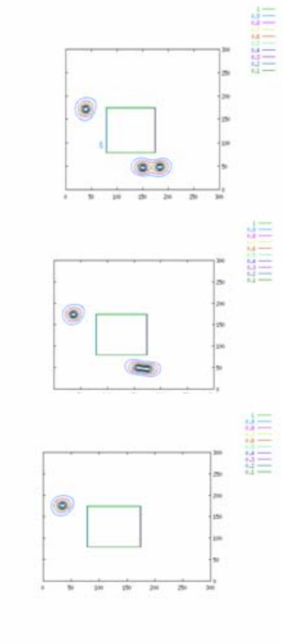
この講演では、空間 2 次元及び３次元で、外部磁場がほどほどの大きさで超伝導状態が完全には壊れていない、いわゆる渦糸状態での、gauge 条件によらない量の比較によって、オーダーパラメータと磁場の各点での特徴づけに関する結果を紹介した。この結果は、3 次元の渦糸解を構成するときの評価に適用できる基本的な結果であると考えている。

3 次元の渦糸解の構成については、柱状領域で外部磁場が長い方向に平行な場合に構成した。

今後はより一般領域での解の構成とともに安定性の検討も重要であると考えている。

(2)磁場なしの Ginzburg-Landau 方程式の渦の対消滅現象の理解

①平成 19 年 2 月に行われた第８回 北東数学解析研究会で「On vortex solutions of the Ginzburg-Landau equations」というタイトルで５０分講演を行った。



この講演では、2 次元で穴が開いている領域における磁場なしの時間依存 Ginzburg-Landau 方程式（放物型）の数値計算を紹介し、その一例で現れる「渦糸の対消滅(2 次元のとき)」「渦輪の消滅(3 次元のとき)」が起きる十分条件を紹介した。

③平成 19 年 7 月に行われた 2007 年度日本応用数理学会で「Ginzburg-Landau 方程式の渦点の生成と消滅」というタイトルで講演を行った。この講演では、2 次元で穴が開いている領域における磁場なしの時間依存 Ginzburg-Landau 方程式（放物型）の数値計算を紹介し、ある境界条件の下で 2 次元領域での「渦点の対消滅」「渦輪の生成」が起きることを紹介した。 渦点の生成現象はこれまで詳細に研究されてきた、境界での写像度を与えるタイプの境界条件では定常状態として渦点が生成することは知られていなかったため大変興味深いものと考えられる。

④ 円環領域上での渦点の生成現象の数値計算と理論解析を行った。

解の境界での degree を与える境界条件では Ginzburg-Landau パラメータ (GL パラメータ) が大きい極限では渦点の対生成は起きないことが知られている。今回の研究で、有限の GL パラメータのもとで Dirichlet 型の境界条件を与えたときに渦点の対生成が生じること，渦点が生成した後にこれを初期値に

して GL パラメータを大きくして計算することを繰り返しても，数値的には渦点の消滅は生じないことを確認した。この、境界条件による現象の違いの数理的な理解は今後の課題である。

数値計算は、極座標で離散エネルギーを構成しその減少方向として差分スキームを導出する離散変分法を用いたが、この問題の場合複素数値関数の周期境界条件を考えることになり”位相が一周期で２πの整数倍変化する”という拘束条件が自動的に付加される。このため、数値計算の手法として「拘束条件付の離散変分法」と言うべきものを考慮する必要があった。これらの結果の一部について，平成 21 年 3 月に行われた Tohoku University Science Web GCOE The 1st GCOE International Symposium で「Emergence and Annihilation of Vortices in Ginzburg-Landau Equations」というタイトルで 30 分講演を行った。

(3) Bose-Einstein 方程式など、他の複素数値関数の渦点の挙動について

Machida-Koyama の提案した超伝導現象と Bose-Einstein 凝縮現象をパラメータでつなぐモデルの解析（解の局所存在、数値計算）を行った。元の Machida-Koyama のモデルは未知関数の満たす方程式が通常の発展方程式の理論を適用しにくい形であったが、変数変換を行うことで反応拡散方程式と非線形シュレディンガー方程式の連立方程式に書き直すことができた。このことにより解析が容易になった。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計１件）

笠井　博則，Ginzburg-Landau 方程式の渦点の生成と消滅－汎関数の最小化による偏微分方程式のある数値解法，　度研究集会報告集「常微分方程式の数値解法とその周辺」，査読無，2009，ｐ.123－128

〔学会発表〕（計６件）

(1) Hironori Kasai, “Emergence and Annihilation of Vortices in Ginzburg-Landau Equations”, Tohoku University Science Web GCOE The 1st GCOE International Symposium, March 7th, 2009, 東北大学

(2) 笠井博則, “Ginzburg-Landau 方程式の渦点の生成と消滅”, 研究集会「常微分方程式の数値解法とその周辺」, 2008 年 2 月 22 日, 秋田県立大学本荘キャンパス

(3) 笠井博則, “Ginzburg-Landau 方程式の渦点の生成と消滅”, 日本応用数理学会 2007 年度年会, 2007 年 9 月 17 日, 北海道大学

(4) Hironori Kasai, “On vortex solutions of the Ginzburg-Landau equations”, 第 8 回 北東数学解析研究会, Feb. 22nd, 2007, Tohoku University

(5) Hironori Kasai, ” Some gauge invariant estimates for Ginzburg-Landau equations” Czech-Japanese Seminar in Applied Mathematics 2006, Sep. 16th, 2006, Czech Technical University

(6) Hironori Kasai, “Some gauge invariant estimates for Ginzburg-Landau equations” First Slovak – Japan workshop on Computational Mathematics, Sep. 12th, 2006, Bratislava and Kocovce chateu, Slovakia

６．研究組織

(1)研究代表者

笠井　博則（KASAI HIRONORI）

福島大学・共生システム理工学類・准教授

研究者番号：20344822