

平成 21 年 5 月 22 日現在

研究種目：若手研究 B
 研究期間：2006～2008
 課題番号：18740045
 研究課題名（和文） グラフマイナー理論と局所変形を用いた曲面上のグラフの多面体的実現
 についての研究
 研究課題名（英文） A study on polyhedral realization of graphs on surfaces using graph
 minor theory and local deformations
 研究代表者
 中本 敦浩（Atsuhiko Nakamoto）
 横浜国立大学・教育人間科学部・准教授
 研究者番号：20314445

研究成果の概要：曲面上に与えられたグラフが、3次元ユークリッド空間に多面体として実現可能か（多面体的実現可能か）という問題の歴史は古く、最も古い研究は 1922 年の Steinitz の定理にさかのぼるだろう。1960 年代に Grubbaum が「任意の向き付け可能な閉曲面の三角形分割は多面体的実現可能である」ことを予想したが、Steinitz の球面上の定理が証明されて以来、それは長い間未解決であった。しかし、2006 年、Bokowski たちは種数 6 の曲面に反例を見つけ、2007 年には Archdeacon たちがトーラス上ではこの予想が正しいことを証明した。本研究では、それらの研究の流れを汲み、向き付け不可能な種数 1 の閉曲面（射影平面）上の三角形分割から 1 つの面を取り除いて得られるメビウスの帯の三角形分割の多面体的実現の研究を行った。特に、射影平面の任意の三角形分割は、ある 1 つの面を取り除くと、多面体的実現を持つことを証明し、さらに、任意の 1 つの面を取り除くことにより多面体的実現を持つ三角形分割を特徴付けた。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	1,400,000	0	1,400,000
2007 年度	1,000,000	0	1,000,000
2008 年度	1,200,000	360,000	1,560,000
年度			
年度			
総計	3,600,000	360,000	3,960,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）

キーワード：曲面，射影平面，メビウスの帯，グラフ，三角形分割，多面体，グラフマイナー，局所変形

1. 研究開始当初の背景

1967 年、Grubbaum は「任意の向き付け可能な閉曲面の任意の三角形分割は多面体的実現を持つ」ことを予想した。この予想は

長い間未解決であったが、2003 年に Bokowski たちが反例を示し、2007 年に Archdeacon たちは種数 1 のときに正しいことを示した。この後者の解決には、剛体幾何

への位相幾何学的グラフ理論の貢献があった。その研究の流れを向き付け不可能な閉曲面の三角形分割（特に、メビウスの帯の三角形分割）の多面的実現可能性の研究へと活かそうと思っても、1983年に Brehm が多面的実現不可能な射影平面の三角形分割をすでに構成しており、彼らの手法をそのままの形で模倣することはできなかった。

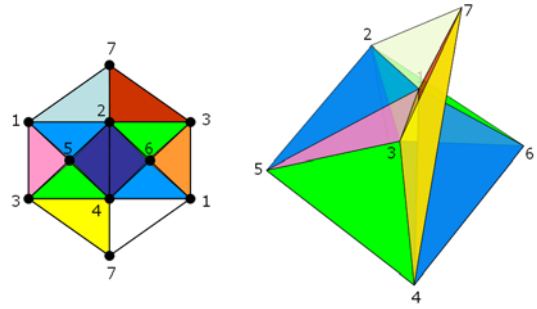
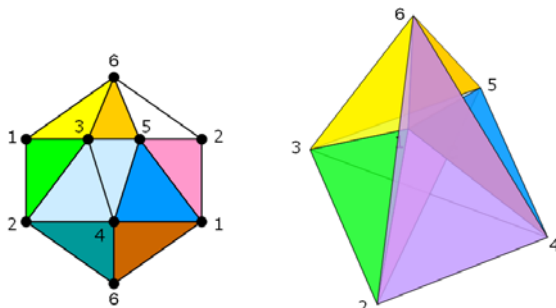
一方、向き付け不可能な閉曲面自身は3次元空間に埋め込み不可能であることから、穴あき曲面を考える必要がある。そのため、閉曲面の三角形分割から面を1つ以上取り除くなどの操作が必要となる。ゆえに、向き付け不可能な閉曲面の三角形分割から、面を1つだけ取り除いて、多面的実現が得られれば、面白いと考えられる。

2. 研究の目的

本研究では、上述の流れを汲み、向き付け不可能な曲面上の三角形分割の多面的実現に関する理論を創造しようと考えた。しかしながら、上述の Brehm の反例があるため、メビウスの帯の三角形分割は少々扱いにくい。そこで、本研究では、射影平面の三角形分割 G を考え、 G から1つの面を取り除いて得られるメビウスの帯の三角形分割の多面的実現可能性を考えることにした。このことにより、1983年以來停滞していた向き付け不可能な曲面上の三角形分割の多面的実現の研究を再開することができた。

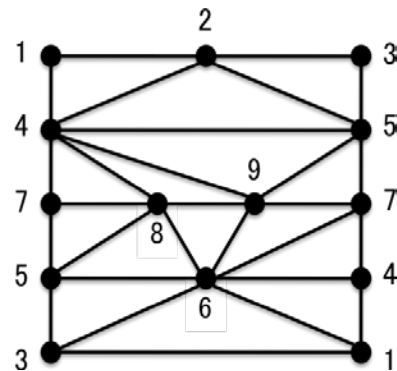
3. 研究の方法

射影平面の三角形分割 G から面を1つ取り除いたグラフが多面的実現可能であることを示すために、 G の多面的実現可能な部分構造を特定しようと考えた。（そのために、これまでの研究で培った三角形分割の局所変形の理論とグラフマイナー理論を用いた。）特に、その部分構造として、 K_6 -マイナーと K_4 -四角形分割を考えた。（次の図において、上は前者の多面的実現であり、下は後者の多面的実現を示している。）



これらの他に、平面の内部三角化グラフにおいて、境界上の2頂点を結ぶパスの存在を証明すること、さらに、射影平面の5-連結三角形分割において、任意の頂点とその絡み閉歩道を含む特別な K_6 -マイナーの存在を保証することにおいて、具体的にその構造を詰めた。

一方、射影平面の三角形分割 G から取り除いて多面的実現が得られる面 f を特徴づけるため、以下の Brehm の反例（下図参照）の構造を解析した。この例は、 G から f を取り除くとき、 f に nested 3-cycle が存在すれば、 $G - f$ は多面的実現を持たないことを示している。そのような面 f を特徴付けるためには、 G と f の関係を考察するための組合せの議論が必要となり、さらに、そこで得られる組合せ構造が多面的実現を持つことを証明しなければならない。



4. 研究成果

得られた研究成果は以下の3つである。

- (1) 射影平面の任意の三角形分割は、ある1つの面を取り除くことにより、多面的実現可能である。
- (2) 射影平面上の任意の5-連結三角形分割は、任意の1つの面を取り除くことにより、多面的実現可能である。
- (3) 射影平面の三角形分割 G が、面 f を取り除くことにより、多面的実現可能であるための必要十分条件は、 G

が f を囲む nested 3-cycle を持たないことである。

最後の結果は多面的実現可能なメビウスの帯の三角形分割を特徴付けており、当初見込まれた最も強い定理である。

一方、これらの一連の結論を得るために、射影平面の三角形分割の K_6 -マイナーの存在を用いた。一般に、与えられた抽象グラフが K_6 -マイナーを持つかどうかを判定することはたいへん難しいとされている。(これらは有名な未解決問題 Hadwiger 予想とも関係しており、グラフマイナー理論の中心的問題である。) ゆえに、このことから閉曲面の三角形分割が K_6 -マイナーを持つかどうかに関する研究は未解決問題の部分的解決になることから、その研究は十分に意味深い。そして、私たちは、近年までに、種数の低い閉曲面の三角形分割が K_6 -マイナーを持つための必要十分条件を、特定の禁止部分グラフにより、特徴付けることに成功している。このことが、私たちの現在の新しい研究テーマになっている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 14 件)

- ① K. Kawarabayashi, T. Honjo and A. Nakamoto, Dominating sets in triangulations on surfaces, *J. Graph Theory*, in-press. DOI 10.1002/jgt.20401. (査読有り)
- ② A. Nakamoto, K. Ota and Y. Oda, 3-trees with a few vertices of degree 3 in 3-connected planar graphs, *Discrete Math.* **309** (2009), 666—672. (査読有り)
- ③ R. Mukae and A. Nakamoto, K_6 -Minors in triangulations and complete quadrangulations, *J. Graph Theory* **60** (2009), 302—312. (査読有り)
- ④ K. Kawarabayashi, A. Nakamoto and Y. Suzuki, N-Flips in even triangulations on surfaces, *J. Combin. Theory, Ser. B* **99** (2009), 229—246. (査読有り)
- ⑤ M. Chavez, G. Fijavz, A. Marquez, A. Nakamoto and E. Suarez, Geometric realization of triangulations on the Mobius band, *SIAM J. Discrete Math.* **23** (2008), 221—232. (査読有り)
- ⑥ K. Kawarabayashi, R. Mukae and A. Nakamoto, K_6 -Minors in triangulations in triangulations on the Klein bottle, *SIAM J. Discrete Math.* **23** (2008), 96—108. (査読有り)
- ⑦ A. Nakamoto and Y. Suzuki, N-Flips in even triangulations on the projective plane, *Discrete Math.* **308** (2008), 5454—5462. (査読有り)
- ⑧ P.C. Bonnington, A. Nakamoto, Geometric realization of a projective triangulation with one face removed, *Discrete Comp. Geom.* **40** (2008), 141—157. (査読有り)
- ⑨ A. Nakamoto, 5-Chromatic even trainulations on surfaces, *Discrete Math.* **308** (2008), 2571—2580. (査読有り)
- ⑩ K. Kawarabayashi and A. Nakamoto, The Erdos · Poca Property for vertex- and edge-disjoint odd cycles in graphs on orientable surfaces, *Discrete Math.* **307** (2007), 764—768. (査読有り)
- ⑪ A. Nakamoto and N. Sasanuma, 3-Coloring of even embeddings on surfaces, *Graphs Combin.* **23** (2007), 87—95. (査読有り)
- ⑫ A. Nakamoto, Y. Oda and K. Ota, K_6 -Minors in triangulations on the double torus, *Congr. Numer.* **188** (2007), 150—160. (査読有り)
- ⑬ K. Ando, H. Komuro and A. Nakamoto, Tight quadrangulations on the sphere, *Discrete Math.* **360** (2006), 278—283. (査読有り)
- ⑭ A. Nakamoto, T. Sakuma and Y. Suzuki, N-Flips in even triangulations on the sphere, *J. Graph Theory* **51** (2006), 260—268. (査読有り)

[学会発表] (計 15 件)

- ① 中本 敦浩, Dominating sets in triangulations on surfaces, Workshop on Topological Graph Theory in Yokohama (TGT20), Yokohama National University, 2008 年 11 月 24 日.
- ② 中本 敦浩, Dominating sets in triangulations on surfaces, 純粹数学及び応用数学としての組合せ論・離散幾何そしてその周辺ワークショップ, 電気通信大学, 2008 年 7 月 5 日.
- ③ 中本 敦浩, Geometric realization of a triangulation on the projective plane with one face removed, Topological and Geometrical Graph Theory 2008, Ecole Normale Supérieure, Paris, France, 2008 年 5 月 22 日.
- ④ 中本 敦浩, Dominating sets in triangulations on surfaces, The 24th PNU-POSTECH Algebraic Combinatorics Seminar, Pusan National University, Korea, 2008 年 3 月 8 日.
- ⑤ 中本 敦浩, Geometric realization of a

triangulation on the projective plane with one face removed, The 32th Australasian Conference on Combinatorial Mathematics and Combinatorial Computing, Otago University, Dunedin, New Zealand, 2007年12月3日.

- ⑥ 中本敦浩, N-Flips in even triangulations and Dehn twists on the torus, 第19回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜国立大学, 2007年11月17日.
- ⑦ 中本敦浩, グラフの変形と曲面の Dehn twists, 短期共同研究, 京都大学数理解析研究所 2007年10月3日.
- ⑧ 中本敦浩, 位相幾何学的グラフ理論「曲面上のグラフの染色数」, 組合せ論サマースクール, カルチャーリゾートフェストーネ, 2007年9月4日.
- ⑨ 中本敦浩, K_6 -Minors in triangulations on the double torus, 研究集会「組合せ論と離散幾何」, 下呂市民会館, 2007年8月7日.
- ⑩ 中本敦浩, Geometric realization of a triangulation on the projective plane with one face removed, International Conference on Computational Geometry and Graph Theory (Kyoto CGGT2007), June 12, 2007.
- ⑪ 中本敦浩, K_6 -Minors in triangulations on surfaces, 38th South Eastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing, Florida Atlantic University, 2007年3月9日.
- ⑫ 中本敦浩, Chromatic number of even triangulations on the Klein bottle, 第18回位相幾何学的グラフ理論研究集会, 横浜国立大学, 2006年11月17日.
- ⑬ 中本敦浩, Geometric realization of a 5-connected triangulation on the Mobius band, 日本数学会 2006年度会, 大阪市立大学, 2006年9月20日.
- ⑭ 中本敦浩, Geometric realization of a 5-connected triangulation on the Mebius band, 研究集会「離散数学とその応用」, 茨城大学工学部, 2006年8月3日.
- ⑮ 中本敦浩, 5-Chromatic even triangulations on surfaces, SIAM conference on Discrete Mathematics, University of Victoria, Canada, 2006年6月26日.

[その他]

ホームページ

<http://www.ms.edhs.ynu.ac.jp/Nakamoto-lab/>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

中本 敦浩 (Atsuhiko Nakamoto)

横浜国立大学・教育人間科学部・准教授

研究者番号：20314445

(2) 研究分担者 なし

(3) 連携研究者 なし