

平成 21 年 5 月 21 日現在

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2006～2008

課題番号：18740048

研究課題名（和文） 界面運動方程式の解の挙動に関する数値的研究

研究課題名（英文） Mathematical research for the dynamics of the solutions of interface motions

研究代表者 石渡 哲哉 (ISHIWATA TETSUYA)

岐阜大学教育学部・准教授

研究者番号：50334917

研究成果の概要：

結晶の界面の動きを模した数学モデルの1つにクリスタライン曲率流方程式がある。この方程式の解の動きについて、理論的・数値的に考察を行なった。特に、解の形状の変化に着目して、まず運動が界面の曲率（曲がり具合）に主に依存する場合について取扱い、時間変化の途中でどのように形が変化していくかを明らかにし、最終的にどのような形になるかの分類を行なった。更に、より一般的な方程式に対して考察を展開した。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,400,000	0	1,400,000
2007年度	1,100,000	0	1,100,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,400,000	270,000	3,670,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：数学・数学一般

キーワード：界面運動、曲率依存方程式、解の挙動、非線形現象、数値モデル、結晶界面、数値計算

1. 研究開始当初の背景

曲線・曲面(以後「界面」と呼ぶ。)の運動の数値的研究は、ステファン問題に現れる自由境界問題など、非線形問題の1つの典型的な話題として古くから理論的研究や数値的研究が行われてきた。その中でも、運動が界面の各点の曲率に依存する場合の研究が、1980年代中盤より活発化した。特に、平均曲率流方程式については、有限時間で形成され

る特異性の研究や、等高面法による数値的・数値的取扱いに関する結果の整備、反応拡散方程式系の特異極限との関連など、様々な角度からの研究が進展した。この中で、本研究に関係の深い結果として、Graysonの凸化定理がある。これは、二次元平面上の滑らかな曲線に対する曲率流方程式の解に対する非常に特徴的な性質で、内容は、「自己交差のない非凸初期曲線からスタートした解曲線は、自己交差を起こすことなく時間発展し、

有限時間かつ縮退する前に必ず凸になる。」というものである。この結果は3次元以上の問題では成り立たないことが知られている。また、凸界面については有限時間で1点に縮退することがGage-Hamiltonらの結果で知られている。つまり、滑らかな曲線に対する理論的結果としては、初期状態からスタートして、途中で凸曲線になり、有限時間で1点に潰れる、という具合に形状の変化としてはほぼ完全に解明されている。しかし、本研究課題で扱うクリスタライン曲率流方程式の場合、方程式の構造やその挙動について類似点は多いものの、解図形の形状の変化についてはそれほど結果が整備されていなかった。クリスタライン曲率流とは、ある特定の条件を満たす多角形状の曲線に関する曲率依存運動で、これらに対しても平均曲率流方程式と同様に、1990年代中盤より活発に研究がされ、曲線短縮方程式の解との関連や、等高面法による取扱いなどの結果が得られてきた。また、K. Ishii and M. Soner や M-H, Giga and Y. Giga, S. Yazaki および研究代表者の研究により、解曲線の挙動について研究が進んで来た。この中で、申請者及びその共同研究者らの研究により、非凸自己相似解が存在することが分かった。つまり、クリスタライン曲率流方程式では2次元平面上の曲率運動ではあるが、必ずしも凸化定理が成り立たないことになる。これはこの時点では大方の予想を覆すものであり、過去の結果の点検と、凸化現象周辺に関する詳細な解析が必要となった。本研究課題はこの状況をうけて設定された。

2. 研究の目的

本研究の目的は、クリスタライン曲率に依存して動く界面の漸近挙動、及び、時間発展途中の解図形の形状変化を明らかにすることである。解図形の変化としては、凸性の変化や界面(解図形の境界)の自己交差について、それらが起きうる条件やその場合の挙動の詳細な把握を目指すこととする。扱うクリスタライン運動としては、外向き法線速度が、クリスタライン曲率の正の冪に比例する一般化クリスタライン曲率流(所謂クリスタライン曲率流を含む。)と、クリスタライン曲率依存項の他、曲線の全クリスタライン曲率と周長に依存した非局所項をもつ面積保存型クリスタライン曲率流の2つを対象とする。

3. 研究の方法

研究は、理論的解析と数値的解析を相補的に進めた。界面の自己交差を回避する条件や、解多角形の凸性獲得に関する情報を、様々な初期図形に対する数値実験を積み上げることにより、良質な予想を立て、それに対する

理論的な解析を進めた。理論解析においては、方程式論的な観点から着目する量だけでなく、幾何学的に意味のある量、例えば、二つの平行な辺の距離や、クリスタライン曲率がゼロである辺の両端の伸縮スピード等を考えた。解析では、これらの関係性について詳細に調べることにより解析を進めた。また、これまでの爆発現象の解析の際に有用であった時間反転に関する変数変換を、時間発展途中に生じる辺の消滅現象の解析に利用し、変換された方程式を用いることにより、解析を進めた。

4. 研究成果

一般化クリスタライン曲率流については、時間発展途中で解図形の辺が消滅することを示し、その場合の消滅パターンを完全に解明した。また、その際の消滅スピードのオーダーについても明らかにした。界面の自己交差については、運動速度がクリスタライン曲率に線形あるいは優線形の依存度を持つ場合に、辺の移動速度に関する異方性と解の属するクラスを決めるウルフ図形について対称性を仮定することにより、任意の非凸初期図形に対して自己交差が起きないことを明らかにした。また、ここで設定した条件が1つでも満たされない場合、自己交差する具体例を構成できることを示し、本研究で設定した条件が最適であることが分かった。凸性については、一般の初期値に対しては凸化定理が成り立たないことが既に分かっているが、有限時間で全ての辺のクリスタライン曲率が非負になることを示し、かつ、解図形が1点に縮退する前に凸図形になるか、あるいは、1カ所だけが窪んだ星状図形になるか、の2つのパターンのみであることが分かった。この結果は、凸化定理が成り立たない一般化クリスタライン曲率流では望みうる最良な結果である。今後の課題としては、最終的に凸図形になるための初期図形に対する十分条件の整備や、自己交差が起きた場合の解の接続問題などが挙げられる。

面積保存型クリスタライン曲率流については、面積が保存されるため一般化クリスタライン曲率流のように1点に縮退することがない。よって、界面の自己交差が起きない場合には凸化定理が成立することが予想されているが、本研究では初期図形の各辺の曲率に非負性の条件をつけ、凸化に関する結果を得た。しかし、一般の初期図形では、ウルフ図形に関する条件とは関係なく、界面の自己交差が起きる例を構成できるため、界面の自己交差回避の条件は、一般化クリスタライン曲率流に対するそれよりも複雑になることが予想される。恐らく、初期図形の何らかの幾何学量に依存するのであろうが、現在明

確な指針はない。ただし、これまでの数値実験から、今回理論的に得られた条件を満たさない初期図形に対しても、かなり広い範囲で界面の自己交差が起きないことが確認されている。これについては、より詳細な研究を進める必要があるため、今後の課題とする。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 8 件)

1. 石渡 哲哉, あるクリスタライン運動の多角形解の挙動について, 京都大学数理解析研究所講究録 1633 「パターンダイナミクスの数理とその周辺」, (2009) 1--10. (査読無)

2. T. Ishiwata, Motion of essential admissible polygons by crystalline curvature flow, Gakuto International Series, Mathematical Sciences and Applications 29 (2008), 201--210. (査読有)

3. T. Ishiwata and S. Yazaki, Interface motion of a negative crystal and its analysis, 京都大学数理解析研究所講究録 1588 「非線形発展方程式と現象の数理」, (2008) 23--29. (査読無)

4. T. Ishiwata, Motion of non-convex polygons by crystalline curvature and almost convexity phenomena, Japan Journal of Industrial and Applied Mathematics, Vol. 25, No. 2 June 2008, 233--253. (査読有)

5. T. Ishiwata and S. Yazaki, Towards modelling the formation of negative ice crystals or vapor figures produced by freezing of internal melt figures, 京都大学数理解析研究所講究録 1542 「現象の数理モデルと発展方程式」, (2007) 1--11. (査読無)

6. 石渡 哲哉, クリスタライン曲率流によって動く多角形領域の挙動, 京都大学数理解析研究所講究録 1543 「波動現象の数理と応用」, (2007) 206--215. (査読無)

7. C. Hirota, T. Ishiwata and S. Yazaki, Numerical study and some remarks on singularities of solutions to anisotropic crystalline curvature flows of nonconvex polygonal curves, Advanced Studies in Pure Mathematics, 47-2, 2007, 543--563. (査読付)

8. 石渡 哲哉, 矢崎成俊, 氷負結晶界面の挙動に対するモデル化の試み, 盛岡応用数学小研究集会 報告集, 2007, 62--66. (査読無)

[学会発表] (計 23 件)

国際会議での発表

1. T. Ishiwata, On the motion of polygons by crystalline curvature, THIRD EURO-JAPANESE WORKSHOP ON BLOW-UP, Tohoku university, Sendai, Japan, Sep. 9, 2008.

2. T. Ishiwata, Motion of essential admissible polygons by crystalline curvature, International Conference on Free Boundary Problems in Chiba 2007, Chiba university, Japan, 29 November, 2007, Poster Session.

3. T. Ishiwata, Motion of polygonal curves by crystalline curvature flow and its generalization, The 6th ICIAM (International Congress on Industrial and Applied Mathematics), Zurich, Swiss, 18 July, 2007.

4. T. Ishiwata, Motion of non-convex polygon by crystalline curvature flow and its generalization, International Conference on Nonlinear Analysis, National Center for Theoretical Sciences National Tsing Hua University Hsinchu, Taiwan, 20-25 November, 2006.

5. T. Ishiwata, Motion of polygonal curves by crystalline curvature, First Sloak-Japan workshop on Computational Mathematics, Bratislava and Kocovce chateau, Slovakia, Sep. 9-13, 2006.

国内発表

1. 石渡 哲哉, バルク効果を考慮したクリスタライン運動について, 研究集会「第10回界面ダイナミクスと数値シミュレーション」, 神戸インスティテュート, 2008年11月27日

2. 石渡 哲哉, クリスタライン曲率に依存して動く多角形曲線の運動について, 京都駅前セミナー, キャンパスプラザ京都, 2008年10月16日

3. 石渡 哲哉, あるクリスタライン運動の多角形解の挙動について, 研究集会「パターンダイナミクスの数理とその周辺」, 京都大学数理解析研究所, 2008年6月25日

4. 石渡 哲哉, あるクリスタライン曲率流方程式の多角形解の挙動について, 芝浦工業大学システム工学部 談話会, 2008年1月23日.
5. 石渡 哲哉, Area-preserving crystalline curvature flow and its application to negative crystals, 研究集会「非線形偏微分方程式とその応用」, 2008.1.9, 神戸大学.
6. 石渡 哲哉, 負結晶界面の運動とその解析(Interface motion of a negative crystal and its analysis), RIMS 研究集会「非線形発展方程式と現象の数理」, 京都大学数理解析研究所, 2007年10月22日
7. 石渡 哲哉, Motion of polygons by crystalline curvature, 非線形解析セミナー, 慶應義塾大学理工学部, 2007年10月3日
8. 石渡 哲哉, クリスタライン曲率流によって動く多角形の運動について, 日本数学会応用数学分科会**特別講演**, 東北大学, 2007年9月24日.
9. 石渡 哲哉, クリスタライン曲率流によって動く多角形の運動について, 岐阜非線形セミナー, 岐阜大学, 2007年8月28日
10. 石渡 哲哉, クリスタライン曲率流の解の挙動に関する最近の結果と諸問題について, MZ セミナー, 宮崎大学, 2007年2月16日.
11. 石渡 哲哉, クリスタライン曲率流方程式およびその一般化の解の挙動について, チューリングセミナー, 東北大学, 2006年12月19日.
12. 石渡 哲哉, Motion of non-convex polygon by crystalline curvature flow and its generalization, 解析セミナー, 神戸大学, 2006年12月8日.
13. 石渡 哲哉, 氷負結晶界面の挙動に対するモデル化の試み, 盛岡 応用数学 小研究集会, 岩手大学, 2006年11月16日.
14. 石渡 哲哉, クリスタライン曲率流によって動く多角形領域の挙動, (招待講演), RIMS 研究集会「波動現象の数理と応用 Mathematical Aspects and Applications of Wave Phenomena」, 京都大学数理解析研究所, 2006年11月1日

15. 石渡 哲哉, あるクリスタライン曲率流による非凸曲線の挙動について, 日本数学会, 大阪市立大学, 2006年9月22日

16. 石渡 哲哉, The motion of non-convex polygon by generalized crystalline curvature flow, 岐阜非線形セミナー, 岐阜大学, 2006年7月12日

17. 石渡 哲哉, 一般化クリスタライン曲率流による非凸曲線の挙動, 語ろう数理解析セミナー, 大阪大学基礎工学部, 2006年6月16日

18. 石渡 哲哉, 一般化クリスタライン曲率流による多角形曲線の挙動, 第2回数学応用数学研究所 解析コロキウム, 早稲田大学, 2006年5月19日

[図書] (計 1 件)

1. T. Ishiwata, Motion of non-convex polygon by crystalline curvature flow and its generalization, Recent Advances in Nonlinear Analysis, Editors : M. Chipot, Chang-Shou Lin and Dong-Ho Tsai, Proceedings of the International Conference on Nonlinear Analysis, 125--134, World Scientific, 2008.(査読無)

[産業財産権]

○出願状況 (計 0 件)

特になし

○取得状況 (計 0 件)

特になし

[その他]

特になし

6. 研究組織

(1) 研究代表者

石渡 哲哉(Tetsuya Ishiwata)

岐阜大学・教育学部・准教授

研究者番号: 50334917

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし