様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　４月　１日現在

研究種目：若手研究（B）
研究期間：2006～2008
課題番号：18740052
研究課題名（和文）　格子気体の流体力学極限の研究

研究課題名（英文）　Studies on hydrodynamic limit of lattice gas

研究代表者
永幡　幸生（NAGAHATA YUKIO）
大阪大学・基礎工学研究科・助教
研究者番号：50397725

研究成果の概要：格子気体の流体力学極限の研究を行った。その中でも特に流体力学極限の証明の中で鍵になる次の二つのことを調べた。(1)ある一般的な条件の下で極限の方程式を決定する拡散係数についてその性質を研究し、滑らかな関数であることが証明できた。(2)スペクトルギャップの評価を行い流体力学極限の証明には十分な結果が得られた。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	1,100,000	0	1,100,000
２００７年度	800,000	0	800,000
２００８年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	2,700,000	240.000	2,940,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計数学）
キーワード：確率論、確率過程論、格子気体、流体力学極限・マルコフ過程

１．研究開始当初の背景

流体力学極限の研究は，(巨視的な)流体の運動を，流体を構成している(微視的な)粒子系の運動法則から理解しようとする試みで、超多体系から時間―空間に対して「良い」スケール変換をすることにより決定論的な方程式を導出することを総称して「流体力学極限」と呼びます.「格子気体の流体力学極限」を数学的に厳密に証明することが目標ですが実際には困難で、(流体の)方程式が導出されるメカニズムを保持しつつ数学的には厳密に「流体力学極限」を証明することのできるモデルが格子気体モデルです。

２．研究の目的

流体力学極限の証明の中でも鍵になる次の 2 つのことについて研究します。

(１)Gibbs 測度に対称な格子気体の拡散係数の滑らかさについて

Gibbs 測度に対称な格子気体の流体力学極限はこの１０年間世界中の多くの研究者の方々が研究をして最後に残った問題がこの拡散係数の滑らかさの問題です。流体力学極限の証明のためには極限で現れる非線形の拡散方程式の弱解の一意性が必要です。この一意性の一つの十分条件と

して「拡散係数が Lipshitz 連続であること」ということが知られています。一方でこの拡散係数は連続微分可能であると予想されますが特殊な場合を除いて証明はされていません。この予想の証明が１つ目の目標です。

(２)Gibbs 測度に対称でない場合の格子気体の流体力学極限を証明するための方法について

一方 Gibbs 測度に対称でない場合の格子気体の流体力学極限は方法論の不在により特殊な場合を除いて全く手がつけられておりません。しかし物理的な直感によりスケール変換をすることにより、時間―空間共に１階の微分方程式が導出されることが予想されます。このため新しい方法を作ることが２つ目の目標です。

３．研究の方法

(１)定常分布とは独立な関数空間の基底をとり Markov 過程の作用素と係数との関係を調べることにより拡散係数の滑らかさを証明します。

(２) まず流体力学極限の証明に必要となると思われるスペクトルギャップの評価をします。その後まず特殊な場合から(既存の結果の拡張から)流体力学極限の証明の新しい方法を作ります。

４．研究成果

(１)上記の方法により Gibbs 測度に対称な格子気体の拡散係数の滑らかさが証明されました。もう少し詳しく書くと次のようになります。

今回取り扱った(開発した)方法のキーワードは dual process もしくは generalized dual process と呼ばれるものです。これは関数空間の適当な基底に対して関数を展開したときの係数と,元の Markov process に対応する generator (差分 operator) を掛けた関数の係数の間の関係をまた operator としてとらえ，特にこの operator が Markov process の generator になるときこの対応する process を dual process、operator 自体は Markov process の generator にならないがその主要部分が Markov process の generator になる場合に対応する Markov process を generalized dual process と呼びます。当然基底の取り方，主要部の取り方には多くの自由度がありますので標語的に「generalized dual process の方法を用いる」というのと，実際に用いるのでは大きなギャップがあります。しかし(格子気体一般で成り立つと思いますが)ある基底の取り方により、よい generalized dual process がとれることが分かりました。

今回取り扱ったモデルでは generalized dual process で書かなければならないケースになっています。さて dual process もしくは generalized dual process を使って書き表された場合，問題はこの新しい Markov process を使って書き直され，拡散係数行列は generalized dual process の operator と、その非主要部で表される部分を使った Poisson 方程式(系)の解を使って書き表すことができるようになります。一般には　すなわち generalized dual process の取り方によってはこの Poisson 方程式に解があるのか、もしくは解があってもその解が拡散係数行列の滑らかさを示すのに十分であるかは自明ではありません。今回のものは Poisson 方程式達が帰納的に解けるような構造を持っているため解の存在、そしてその後の評価にも十分なものになっています。

この方法により最後に「出発点の違う２つの Markov process のある集合への滞在時間の差が意味を持つか持たないか」という問題に帰着されます。このため次元が高い場合 (3 次元以上の場合) 差をとらなくてもそれぞれの滞在時間が意味を持ち　問題は比較的容易に解決されますが，次元が低い場合 (1、2 次元の場合) 滞在時間自体は発散し意味を持ちませんが　差をとることによりようやく意味を持たせることができ、問題を解決することができました。

(２) 格子気体の一種の zero-range process のあるパラメータ領域でスペクトルギャップのよい評価を得ました。しかしこの評価に時間がかかり今回は新しい方法までは進めませんでした。以下に今回行ったスペクトルギャップの評価について詳しく書きます。

一般的に状態空間が離散的な Markov process の generator は(差分) Laplacian のような operator になります。特にこの operator が (ある測度に対して) 対称である場合全ての固有値は非正の実数になり最大固有値 0 とその次の固有値 (第 2 固有値) との差を spectral gap と呼びます。この量はもちろん解析学一般に重要な量でありま

すが，確率論だけに特定してみても例えば緩和時間に直接的に関わります。この量は通常の Laplacian と同様に系のサイズが大きくなるとそれに従って spectral gap は小さくなっていきます。流体力学極限の話ではその小さくなるオーダーの評価が必要になります。今回は Gibbs 測度に対して対称でない格子気体を考えますのでこのままでは一見関係ないように思われますが、この格子気体の対称化を考え対称化された格子気体の spectral gap を評価することが元の格子気体の流体力学極限を考えるときに(他の問題を考えるときにも)必要になってくると予想されます。さて zero-range process と呼ばれるモデルは格子気体の一つの典型例ですが、このモデルでは一つの格子点にいくつでも粒子が重なって入ることが可能なモデルです。このようなモデルの中でも簡略化したモデルとして粒子間の相互作用は距離 0 すなわち自分と同じ格子点にいる粒子とだけ相互作用をするモデルです。このようなモデルですと非常に簡単に思われますが　相互作用の入れ方により非常に特異な(奇異な)振る舞いを起こさせることもできます。先にも少し書きましたが　このモデルでも spectral gap は系のサイズが大きくなるにしたがって spectral gap は小さくなります。この中でも粒子同士には引力が働く場合を考えると一つの格子点に多くの粒子が入った場合には同じ格子点にいる自分以外の粒子から(少しずつとはいえ全てを合わせると)大きな引力を受け動きにくくなり　その結果、 spectral gap も小さくなることが予想されます。この多くの粒子がある場合の効果を取り入れた結果を得ることが重要になります。このような場合を含めてもっと一般的な状況(斥力の場合だけでなく、3 体以上の相互作用も考えて) spectral gap は「系の大きさにより小さくなる部分」と「粒子数密度に依存する部分」の積でかけると予想されます。

今回行った研究では斥力または弱い引力が働く場合に適用できる結果です。もう少し詳しく書くと(数学用語としての) attractive なケースに使える方法を用いました(開発しました)。この方法は大きく分けて 3 つの部分に分かれ　それぞれの部分の方法はすでに知られている方法です。しかしながらこれらを組み合わせることと、(特に最後の部分の)適用は容易ではありません。以下にこの方法を簡単に紹介します。

１つ目は系の大きさにより小さくなる部分と粒子数密度により小さくなる部分を分離するために平均場近似を用います。

２つ目は平均場近似をした格子気体に対してカップリングの手法を用いて(第 2 固有値よりは計算しやすいと思われる)ある部分空間への到達時間の評価に置き換えます。

3 つ目は (そのものではありませんが)ペロン―フロベニウスの定理(そのものではありませんが)を使うことにより到達時間の評価をよい性質を持つ関数が存在することに置き換え、実際にモデルに即した関数を構成します。

このように書くと簡単そうに見えますが、2 つめのカップリングの方法と 3 つ目で構成する関数は密接に関わってくるため単純な問題ではありません。今回は(数学用語としての) attractive なケースであることを強く使ったカップリングを用いることによって予想される結果を肯定的に示すことができました。

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計２件）

① <u>Y.Nagahata</u>
Regularity of the diffusion coefficient matrix for lattice gas reversible under Gibbs measures with mixing condition.
Communications in Mathematical Physics, 2007, 273, No. 3, 637-650, 査読有

② <u>Y.Nagahata</u>
Regularity of the diffusion coefficient matrix for generalized exclusion process.
Stochastic Processes and their Application, 2006, 116, 957-982, 査読有

〔学会発表〕（計８件）

① <u>Y.Nagahata</u>
Central limit theorem for a class of linear systems
マルコフ過程とその応用
2008 年 10 月 17 日-19 日
兵庫県立大学神戸キャンパス

② <u>Y.Nagahata</u>
Central limit theorem for a class of linear systems
日独共同研究 Stochastic Analysis and Applications 2008
2008 年 9 月 8 日-12 日
九州大学　西新プラザ

③ Y.Nagahata
Spectral gap for zero range process with jump rate
$g(x)=x^¥gamma$
Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems
2007年10月22日-26日
九州大学　西新プラザ

④ Y.Nagahata
Spectral gap for zero range process with jump rate
$g(x)=x^¥gamma$
Dirichlet Forms, Stochastic Analysis and Interacting Systems
2007年9月17日-21日
T.U.Berlin

⑤Y.Nagahata
Regularity of the diffusion coefficient matrix for lattice gas reversible under Gibbs measure with mixing condition
97th statistical mechanics conference
2007年5月6日-8日
Rutgers University

６．研究組織
(1) 研究代表者
永幡　幸生 (NAGAHATA YUKIO)
大阪大学・基礎工学研究科・助教
研究者番号：50397725