様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年６月２６日現在

研究種目：若手研究　（B）
研究期間：2006～2008
課題番号：１８７４００６２
研究課題名（和文）　様相論理のモデル理論の圏論による一般化

研究課題名（英文）　A categorical generalization of models for modal logics

研究代表者
田中　義人　（TANAKA YOSHIHITO）
九州産業大学・経済学部・教授
研究者番号：７０３２０１３２

研究成果の概要：
Subdirectly irreducible な有限 Heyting 代数における Jankov の定理から，有限という条件を外し，ある一定の条件を満たす sudirectly irreducible Heyting 代数への拡張を行った．また，有限 Kripke frame における canonical formula の理論を，一般の Kripke frame に拡張した．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	1,000,000	0	1,000,000
２００７年度	900,000	0	900,000
２００８年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	2,800,000	270,000	3,070,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般（含確率論・統計学）
キーワード：Heyting 代数，Kripke モデル，非古典論理

１．研究開始当初の背景

（１）　C を任意のカテゴリとし，T:C→C を C 上の endofunctor とする．このとき，C の任意の object c と，c から T による c の像 Tc への C の任意の arrow f：c→Tc に対し，それらの対（c,f）を coalgebra という．Coalgebra の概念は，オートマトンや Kripke モデル等の state based system を圏論で抽象化したものである．また，coalgebra の名称の通り，T が comonad の場合は，algebra の dual になっている．Coalgebra の理論は，様相論理の理論と大変密接な関わりを持っている．実際，様相論理の主要なモデルである Kripke モデルは，coalgebra の特殊な例になっている．また，Moss や Pattinson らによって，coalgebra の振る舞いが，様相無限論理によって大変よく記述できることも示されている．このような，coalgebra と様相論理の間の密接な関係は，様相論理のモデル理論の coalgebra による一般化が可能であることを期待させるものであった．

（２）　様相論理の主要なモデルである Kripke モデルに関しては，有限 Kripke frame を特徴付ける論理式，すなわち canonical formula の存在が，Fine 等によ

って知られて以来，その性質について，現代までに，数多くの研究結果が得られていた．また，Kripke frame と双対の関係にある，代数に関しては，subdirectly irreducible な有限 Heyting 代数を特徴付ける論理式の存在が，Jankov によって知られていた．そして，それらを関連づけるものとして，frame と代数の間の双対性があり，それについても，多くの研究結果が知られている．一方で，述語論理や無限論理のモデルを考える場合，有限の Kripke frame や代数では不十分であり，有限とは限らない，一般の場合の研究が必要であった．また，coalgebra と Kripke frame との密接な関連を考えると，Pattinson らによる，様相無限論理による coalgebra の特徴付けからは，Kripke frame においても，有限という制限を取り除いた canonical formula の存在が自然に予想された．さらに，代数と Kripke frame の双対性を考えると，有限とは限らない，一般の Heyting 代数の canonical formula の存在も期待された．さらに，Kripke frame や Heyting 代数の canonical formula を，有限とは限らない一般の場合に拡張した理論が得られれば，Pattinson 等による研究との関連を起点に，すでに多くの蓄積がある様相論理のモデル理論における研究結果を，coalgebra へと一般化することが期待された．

２．研究の目的

（１）　様相論理のモデル理論で知られている様々な研究結果を，圏論，特に coalgabra の理論を用いて一般化すること．　それにより，coalgebra の新たな性質を定式化することを目指すこと．また，様相論理のモデル理論における様々な現象を，圏論の中で統一的にとらえること．例えば，Barcan formula と infinite meet と様相演算子の distributivity を圏論の中で統一的に取り扱うことを目指す．

（２）　（１）の起点となる研究として，有限 Kripke Frame や有限 Heyting 代数における canonical formula の理論から，有限という制限を取り除き，無限論理を用いて，有限とは限らない一般の完備代数と continuous homomorphism や，一般の Kripke frame の canonical formula を求めること．さらに，それらの理論と，Pattinson らによる coalgebra の様相無限論理による特徴付けとの関連を明らかにすること．また，それらを coalgebra の理論の中で一般化し，統一的に取り扱いができる理論を構築すること．

３．研究の方法

（１）　Subdirectly irreducible な有限 Heyting 代数に対する canonical formula による特徴付けは，Jankov によって，１９６０年代にはすでに知られていた．この結果から，有限という制限を取り除くことを考える．すると，そこには，２つの方向があることが分かる．１つは，代数そのものの cardinality の拡張である．それにともなって現れるもう１つは，代数の meet や join のとる集合の cardinality の拡張である．この２番目の拡張は，homomorphism の保つ meet や join の拡張も含んでいる．ここでは，その両方の拡張を取り扱い，ある一定の条件を満たす，有限とは限らない，任意の subdirectly irreducible 完備 Heyting 代数に対する，無限論理を用いた canonical formula を求めた．

（２）　有限で，root を持つような Kripke フレームに対する canonical formula による特徴付けは，Fine 等により，１９７０年代には得られていた．この結果から，frame の cardinality が有限という制限を取り除き，一般の rooted Kripke フレームに対する，無限論理を用いた canonical formula を求めた．

４．研究成果

（１）A を subdirectly irreducible な有限 Heyting 代数とする．Jankov は，論理式 χ で，任意の Heyting 代数 B に対し，以下の２条件が同値になるようなものを発見した：

(a) B で χ は refutable
(b) A は，B の homomorphic image の subalgebra と同型

この定理から，Heyting 代数の cardinality や homomorphism の保つ join，meet のとる集合の cardinality が有限という条件を外して，自然に拡張することを考える．まず，完備 Heyting 代数 A が任意に与えられたとする．すると，無限論理を用いた χ の形式的な拡張は自然に定まる．この χ が，任意の完備 Heyting 代数 B に対し，次の２条件を満たすことを示せばいいことになる：

(c) B で χ は refutable
(d) A は，B の continuous homomorphism の image の closed subalgebra と同型

ここで，Heyting 代数 A から B への continuous homomorphism f とは，A の任意の部分集合 X に対し，$\bigwedge X$ や $\bigvee X$ が A に存在するならば，

$$f(\bigwedge X) = \bigwedge f[X]$$

や

$f(\bigvee X) = \bigvee f[X]$

が成り立つもの，すなわち，A の任意の meet と join を保存するもののことをいう．また，B の closed subalgebra S とは，B の subalgebra で，inclusion i:S→B が，continuous になるもののことをいう．実際，S が完備 Heyting 代数であっても，inclusion が continuous にならない例が存在するため，このような拡張が必要になる．さらに，条件（d）での同型は，continous な全単射が存在することを意味している．

ところが，これを Jankov の方法で証明しようとすると，その中で用いている Lemma の１つに反例があることがわかった．これは，定理の拡張そのものの反例ではないものの，Jankov の定理の拡張を Jankov の方法で示すことは，不可能であることを示すことになった．

（２）　（１）の結果をうけて，Jankov の定理を Jankov の方法で拡張するには，continuous homomorphism より，弱い概念が必要であることがわかった．そこで，次の pseudo continuous homomorphism という概念を導入した：

定義：f を完備 Heyting 代数 A から完備 Heyting 代数 B への homomorphism とする．F を f による B の最大元の逆像とし，b を F の補集合の join とする．　この b と F に対し，

$\bigwedge \{b \to x \in F \mid x \in F\} \in F$

が成り立つとき，f を pseudo continuous homomorphism という．これは，countinuous homomorphism の自然な拡張になっている．直感的には，pseudo continuous homomorphism は，$\bigvee X$ が最大元になるような join 以外の，任意の meet と join を保つような homomorphism のことである．

さらに，完備 Heyting 代数 A で，最大元でない任意の要素 a と，a を含まない任意の素フィルターF に対し，A のある要素 b で，以下の４条件をみたすものが存在するとき，A を T-regular ということにする：

１．↓b の補集合を G とするとき，G は A のフィルター
２．A から A/G への projection は pseudo continuous
３．a は，A から A/G への projection で，A/G の second greatest element に移される
４．F⊆G

ただし，↓b は，x≦b を満たす A の要素 x の集合を表す．T-regular Heyting 代数のクラスは，任意の有限 Heyting 代数，および任意の線形 Heyting 代数を含む．また，直積，直和で閉じている．以上のように定義した pseudo continuous homomorphism と T-regular Heyting 代数，および，無限論理を用いた χ の自然な拡張に対し，以下のような Jankov の定理の拡張が成り立つことを示した：

定理：A を subdirectly irreducible な完備 Heyting 代数とし，B を完備 T-regular Heyting 代数とする．このとき，次の２条件は同値：

（e）B で，χ は refutable
（f）A は，B の pseudo continous homomorphism の image の closed subalgebra と同型

（３）　F を有限で，root を持つような Kripke frame とする．F は直観主義の frame であっても，様相論理の frame であってもよい．このとき，F は，ある canonical formula α で特徴付けられることが知られている．すなわち，任意の Kripke frame G に対し，以下の２条件が同値になるような論理式 α の存在が知られている：

(a) G で α は refutable
(b) G から F へ subreduction が存在する

この研究結果から，Kripke frame の cardinality が有限という制限を取り除いた一般化を行った．すなわち，有限とは限らない任意の Kripke frame G に対し，α の無限論理を用いた自然な拡張が，上記の条件(a)，(b)を満たすことを示した．この研究結果と（２）の研究結果とを比較すると，T-regular Heyting 代数と，Kripke frame の dual algebra との間に何らかの関連性があることが予想される．しかし，Litak により，T-regular でない Kripke frame の dual algebra の存在や，Kripke frame の dual algebra でない T-regular Heyting 代数の存在が明らかにされている．このことから，Jankov の定理の拡張が成り立つ代数のクラスは，T-regular Heyting 代数のクラスよりも広いことが予想される．その範囲を明示的に示すことは，今後の課題として残されている．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

① Yoshihito Tanaka, Extensions of canonical formulas for Heyting algebras and intuitionistic frames, Proceedings of the 42nd MLG meeting,

査読無し, 2008, pp.25-28

② Yoshihito Tanaka, An infinitary extension of Jankov's theorem, Studia Logica, 査読有り, 2007 ,71-1, pp.57-86

③ Yoshihito Tanaka, Continuous homomorphisms of Heyting algebras, Proceeding of the 40th MLG meeting, 査読無し, 2006, pp.26-29

〔学会発表〕(計３件)

① Yoshihito Tanaka, Extensions of canonical formulas for Heyting algebras and intuitionistic frames, The 42nd MLG meeting, 2008 年 11 月, 九州産業大学

② Yoshihito Tanaka, An extension of canonical formulas, The 41th MLG meeting, 2007 年 12 月, KKR 城崎玄武

③ Yoshihito Tanaka, Continuous homomorphisms of Heyting algebras, The 40th MLG meeting, 2006 年 12 月, ゆふいん七色の風

〔その他〕(計１件)

① Nobu-Yuki Suzuki and Yoshihito Tanaka, Proceedings of the 42nd MLG meeting, 2008

６．研究組織

(1)研究代表者

田中　義人　(TANAKA　YOSHIHITO)
九州産業大学・経済学部・教授
研究者番号：70320132