様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年　6 月 25 日現在

研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：２００６～２００８
課題番号：１８７４００６３
研究課題名（和文）　**P&Q 多項式スキームのモジュラー表現の研究**
研究課題名（英文）　**On modular representations of P & Q polynomial schemes.**

研究代表者　島袋　修（SHIMABUKURO OSAMU）
独立行政法人国立高等専門学校機構
福島工業高等専門学校・一般教科・講師
研究者番号：40413736

研究成果の概要：代数的組合せ論の中心的役割であるアソシエーションスキーム(AS)において性質の良い P&Q 多項式スキーム(PQPS)のモジュラー隣接代数の構造を決定する為の足がかりを得た。それによって、AS の構造論のみならず周辺分野も発展させることができる。具体的には PQPS の一種であるジョンソンスキーム(JS)の一般化された構造から得られる代数の構造定数を決定した。また、正標数の体上における JS たちのパラメーター間におけるいくつかの準同型をみつけた。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	800,000	0	800,000
2007 年度	600,000	0	600,000
2008 年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総　計	2,000,000	180,000	2,180,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・数学一般
キーワード：組合せ論

１．研究開始当初の背景

P&Q 多項式スキーム(以下、PQPS)は、性質のよい可換なアソシエーションスキーム（以下、AS）で、他分野との係わり合いが特に深い構造である。それらは、デルサルトによってデザイン理論、線形計画法、符号理論に応用されてきた。最近では他の情報数理の分野にも活用されている。

研究の全体構想は、PQPS のモジュラー表現論を確立することである。具体的には、PQPS のモジュラー隣接代数の構造を決定することである。それによって、AS の構造論のみならず周辺分野も発展させることができる。しかし、AS の表現論は、いままで複素数体上でのみ考えられており、正標数の体上での理論は、考えられていなかった。正標数の体上での表現（モジュラー表現）を考えることは、意味がある。例えば、PQPS で最も有名なもののうちの一つにジョンソンスキーム（以下、JS）とよばれる AS がある。その JS の部分構造であるフュージョンスキームは、小さなパラメータに対してのみ存在、非存在が知られており、それ以外のパラメータに対しては、わかっていない。これは、現在の AS の構造論、及び複素数体上の AS の表現論の限界を示す一例である。モジュラー表現は、そのような AS の抱えている数々の未解決問題のブレイクスルーになると考えている。

２．研究の目的

本研究課題の具体的な目的は以下のとおりである。

(1) **JS のモジュラー隣接代数の構造を決定する。**これは、いくつかのパラメータに対しては決定済みであるので、年度内の解決が可能である。
(2) **JS は、対称群と関係がある AS である。また、そのモジュラー指標は 2 行のヤング図形と関係があることがわかっている。JS の定義を拡張した AS のモジュラー指標はヤング図形とどのように関係しているか調べる。**すでに知られているヤング図形に関する結果は多数ある。それらと、実際の計算機実験結果を用いて性質を明らかにする。
(3) **古典型の PQPS について、モジュラー指標の個数は決定できた。それらの一部は、ある組合せ論的な構造（semi-lattice）と密接に関係していることがわかった。その性質を用いてモジュラー隣接代数の構造を決定する。**semi-lattice は古典型の PQPS の一部に対してのみ現れる構造である。しかし、概念を拡張することですべての古典型の PQPS に適用できると考えている。来年度中に、semi-lattice の拡張が可能である。
(4) **一般的な PQPS のモジュラー既約指標の個数を決定する。**PQPS の性質のみからモジュラー隣接代数の構造を決定するために個数を決定する必要がある。
(5) **一般的な PQPS のモジュラー隣接代数の構造を決定する。**この問題の解決するために PQPS に現れる直交多項式系がモジュラー隣接代数の構造にどのように表れるかを調べる。

３．研究の方法

(1) **JS のモジュラー隣接代数構造を決定する。**効果的に研究を進める上でのアイディアは、代数準同型とテンソル分解を用いることである。

m 個の元からなる集合 M の n 個の元からなる部分集合達の集合に対して距離が定義できる。それを用いて JS が得られる。これを $J(m,n)$ とかく。F を標数 $p(>0)$ の体として、 $FJ(m,n) = F \otimes_Z A$ の構造の研究である（ただし A は $J(m,n)$ から得られる隣接代数とする）。**より大きなパラメータの F 上隣接代数を小さなパラメータの F 上隣接代数で表すことが代数構造を調べる上でのファーストステップになる。** $FJ(m,n)$ については p=2 で $FJ(2(2^t-1),2^t-1) \cong \otimes^t FJ(2,1)$ とテンソル分解を用いて小さなパラメータで表すことができ、p が奇数のときもテンソル分解可能である。また $J(2n+k,n)$ から $J(2(n-1)+k,n-1)$ への代数全準同型写像 $FJ(2(p-1)+l,p-1) \cong mF[x]/(x^2) \oplus F$ （ただし $p = 2m+1$）であることがわかったので、より一般的に構造を決定することができる。最終的には、テンソル分解された $J(m,p^t-1)$ から準同型定理を用いることで、すべてのパラメータに対する代数構造が決定出来る。

(2) **JS の定義を拡張した AS のモジュラー指標とヤング図形との関係を明らかにする**アイディアは、対称群の表現論と計算機実験を繰り返し、モジュラー指標とヤング図形の関係を明らかにすることである。具体的には、G を m 次対称群 S(m) とし、H を $S(n_1) \times S(n_2) \times \cdots \times S(n_l)$ なる G の部分群とする。ただし、$n_1 + n_2 + \cdots + n_l = m$ である。G の H による右剰余類を X とすると X 上に G は可移に作用している。G を X × X に自然に作用させた時の軌道全体を $R_0 = \{(x,x) \mid x \in X\}, R_1, \cdots, R_n$ として AS が得られる。これは、可換ではないが l = 2 のとき JS なので、この意味で JS の一般化である。

このモジュラー隣接代数の指標を AS の理論から決定し、対称群の表現と計算機実験から指標と対応するヤング図形の関係を明らかにする。

(3) **古典型の PQPS についてモジュラー隣接代数の構造を決定する。**ほとんどの古典型の PQPS は、Regular semi lattice の構造を持つことがわかった。これは、JS のモジュラー隣接代数の構造が分かると、同様の手法で Regular semi lattice の構造を持つ古典型の PQPS のモジュラー隣接代数の構造も決定できることを意味している。

４．研究成果

(1) 拡張されたJSの構造に関する結果を得た。G を m 次対称群 $S(m)$ とし、H を $S(n_1)\times S(n_2)\times\cdots\times S(n_l)$ なる G の部分群とする。ただし、$n_1+n_2+\cdots+n_l=m$ である。G の H による右剰余類を X とすると X 上に G は可移に作用している。G を $X\times X$ に自然に作用させた時の軌道全体を $R_0=\{(x,x)\mid x\in X\},R_1,\cdots,R_n$ としてアソシエーションスキーム(以下AS)が得られる。これは、可換ではないが $l=2$ のときJSなので、この意味でJSの一般化である。このモジュラー隣接代数の指標をASの理論から決定し、対称群の表現と計算機実験から指標と対応するヤング図形の関係を明らかにすることが最終的な目的である。しかし、この拡張されたJSについては、組合せ論的には研究されていなかった。

そこで、このASを多重集合と行と列の和がそれぞれ一定である行列を用いることで組み合わせ論的構造としてとらえることがわかった。これはJSの組合せ論的構造の一般化であることもわかった。この方法により隣接代数の構造定数を決定することができた。指標決定が次の目標である。

(2) より大きなパラメータの F 上隣接代数を小さなパラメータの F 上隣接代数で表すことが代数構造を調べる上で重要である。$FJ(m,n)$ については $p=2$ のとき、$FJ(2(2^t-1),2^t-1)\cong\otimes^t FJ(2,1)$ とテンソル分解を用いて小さなパラメータで表すことができ、p が奇数のときは、$FJ(2(p^t-1)+a_{t-1}p^{t-1},p^t-1)$ がテンソル分解可能である。また $J(2n+k,n)$ から $J(2(n-1)+k,n-1)$ への代数全準同型写像があり、特に p が奇素数のときは、$FJ(2(p-1)+1,p-1)\cong mF[x]/(x^2)\oplus F$ であることがわかった。

$FJ(2(p^t-1)+a_{t-1}p^{t-1}+a,p^{t-1}-1)$ はいくつかの多元環のテンソル積から得られる部分代数であることがわかった。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　２件）

1. Osamu Shimabukuro: Multinomial Coefficients and the Johnson Scheme. SUT Journal of Mathematics. 査読有,43,No.1 (2007) p49-59.
2. Osamu Shimabukuro:On the number of irreducible modular representations of a P and Q polyonomial scheme.European Journal of Combinatorics. 査読有,28 (2007) p145-151.

〔学会発表〕（計　３件）

1. Osamu Shimabukuro: Multinomial Coefficients and the Johnson Scheme. 21世紀COE国際会議「機能数理学の構築と展開,2007.10.3,（福岡リーセントホテル）
2. Osamu Shimabukuro: あるP&Q多項式スキームの既約モジュラー表現の個数について. 代数的組合せ論ミニ集会,2007.3（神戸学院大学）
3. Osamu Shimabukuro: 多項係数とジョンソンスキーム.有限群論草津セミナー,2007.8(草津セミナーハウス)

〔図書〕（計　０件）

〔産業財産権〕
○出願状況（計　０件）

○取得状況（計　０件）

〔その他〕
なし

６．研究組織
(1)研究代表者

島袋　修（SHIMABUKURO OSAMU）
独立行政法人国立高等専門学校機構
福島工業高等専門学校・一般教科・講師
研究者番号：40413736

(2)研究分担者

(3)連携研究者