様式 C-19

# 科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　５月１９日現在

**研究種目：若手研究（B）**
**研究期間：２００６～２００８**
**課題番号：１８７４００６６**
**研究課題名（和文）**
**非線型双曲型および分散型方程式に対する零条件の研究**
**研究課題名（英文）**
**Studies on the null condition for nonlinear hyperbolic and dispersive equations**
**研究代表者**
**砂川　秀明（SUNAGAWA　HIDEAKI）**
**大阪大学・大学院理学研究科・准教授**
**研究者番号：８０３７５３９４**

研究成果の概要：双曲型および分散型の非線型偏微分方程式に対する零条件を確立し，種々の非線型波動現象の背後に潜む数学的構造を抽出することを目標として研究を行った．１年目は微分型の非線型シュレディンガー方程式について考察し，方程式にゲージ不変性がある場合には満足できる結果が得られた．２年目は非線型シュレディンガー方程式における非線型消散構造の特徴づけに成功した．３年目は質量共鳴下での非線型クライン・ゴルドン方程式系においてエネルギーの増大が起こらないための非線型項の形状に関するひとつの十分条件を得た．

交付額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合　計 |
|---|---|---|---|
| ２００６年度 | 1,200,000 | 0 | 1,200,000 |
| ２００７年度 | 1,100,000 | 0 | 1,100,000 |
| ２００８年度 | 1,100,000 | 330,000 | 1,430,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総　計 | 3,400,000 | 330,000 | 3,730,000 |

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：関数方程式

１．研究開始当初の背景
双曲型および分散型方程式は広義の波動現象に由来する偏微分方程式のクラスであり，その非線型相互作用下における解の振る舞いを明らかにすることは，数学的な興味はもとより，応用上も大変重要であると広く認識されている．このため古くから多くの研究が精力的になされてきたが，非線型性に起因する様々な困難のため，解の大域的な性質が本格的に論じられるようになったのは比較的最近のことである．研究課題名にある零条件(null condition)とは，非線型双曲型方程式の初期値問題が時間大域的な古典解を持つための非線型項の形状に関する条件であり，1970 年代の John による非線

型弾性体方程式の解の安定性に関する研究に起源を持つ．狭義の波動方程式(線型部分がダランベルシアンの場合) に対する零条件は 1980 年代以降 Klainerman, Christodoulou, Hormander 等をはじめとする多くの人々によって盛んに研究され，ある程度成熟した理論が確立されていると言える．これに対して，例えば(ダランベルシアンに定数係数の低階項を加えただけにすぎない)クライン・ゴルドン方程式に対してさえ，零条件に相当する条件はダランベルシアンの場合とは著しく異なったものになることが 2000 年頃に Delort によって指摘されており，より一般の非線型双曲型方程式や非線型分散型方程式に対して零条件をどのように理解するかという問題について一層の研究が待たれるところであった．

## ２．研究の目的

上記のような状況を踏まえて本研究では(必ずしも線型部分がダランベルシアンとは限らない)非線型双曲型および分散型方程式における解の大域的な性質と非線型構造との関係についての理解を，ダランベルシアンの場合に分かっているレベルにまで引き上げることを目的とした．特に，これらのクラスの代表格ともいうべき非線型クライン・ゴルドン方程式および非線型シュレディンガー方程式に対して零条件の類似物を確立し，それを軸にしてこれまで個別に論じられてきた諸結果に統一的な見通しを与えることを目指した．

## ３．研究の方法

まず，古典解の最大存在時間(ライフスパン)の漸近評価に注目した．例えば空間 3 次元において 2 次の非線型項を持つ波動方程式(線型部分はダランベルシアン)の場合には，対数スケールで見たライフスパンの，初期値の大きさを 0 に近づけたときの極限は，初期値のみから決まるある量と非線型項の形状のみから決まるある量の積の逆数に等しいことが知られている．そしてこの関係式における「非線型項の形状のみから決まる量」が恒等的に零であることと，方程式が零条件を満たすこととは同値になる (John, Hormander, 1987)．本研究では，以上のことの非線型シュレディンガー方程式版を考えることから出発して「非線型項の形状のみから決まる量」を見出し，それをもとにして非線型シュレディンガー方程式に対する零条件の類似物を確立した．また，この証明中に用いた近似解の構成法を，微分型の非線型シュレディンガー方程式における非線型消散構造の特徴づけや非線型クライン・ゴルドン方程式系における非線型共鳴の制御といった問題に適用できるように改良し，下記のような成果を得た．

## ４．研究成果

（１）空間低次元における非線型シュレディンガー方程式の解の時刻無限大における漸近挙動には，一般に，初期値がどんなに小さくて滑らかであっても本質的な非線型効果が現れることが知られている． 一方，非線型項が特殊な形状をしているときには効果が相殺されて自由解（線型化した方程式の適当な解）に漸近する場合があることも知られている．そこで非線型項の形状と解の大域的な挙動との関係が問題になる．本研究課題の第１の成果は，川原雄一朗氏と共同でこの問題に対する一つの答えを与えたことである．より詳しく言うと，空間１次元で方程式にゲージ不変性がある場合についてこのような相殺が起こるための非線型項の形状に

関する一つの条件を与え，その条件と（狭義の波動方程式の場合に知られていた）零条件との類似性を指摘した．ここで得られた条件は，1990 年代半ばに堤誉志雄氏と片山聡一郎氏によって導入されていた「零ゲージ条件」の拡張にもなっている．

（２）林仲夫氏，P.I.Naumkin 氏と共同で，空間１次元で非線型項に未知関数の微分が含まれる場合の(一般化された)非線型シュレディンガー方程式における非線型消散構造の特徴付けを考察し，非線型項が摩擦のように作用して解が自由解よりも早く時間減衰するための，非線型項の形状に関する十分条件を得た．さらに副産物として，かなり一般的な状況における非線型項の形状と解の長時間挙動との関係を明らかにすることができた．空間１次元で３次の微分型非線型項を持つシュレディンガー方程式に関する限り，これまで個別に論じられてきた諸結果は(初期値の属する関数空間のクラスを気にしなければ)ほぼ全て今回の結果から統一的に理解することができる．

（３）空間低次元における非線型クライン・ゴルドン方程式の連立系では，質量項と呼ばれる線型部分の低階項の係数の比に応じて解の長時間挙動の定性に違いが生じうること(ある意味での共鳴現象)が最近の研究で徐々に明らかにされつつある．（例えば空間２次元の場合には，質量の比が２でない場合は解のエネルギーは時間に関して有界であるが，比が２である場合にはエネルギーが時間に関して対数オーダーで増大していくような例を構成することができる．）質量項の間に共鳴関係がない場合の解の長時間挙動については既に多くの先行結果があり，本質的な部分はほぼ解明されているが，質量共鳴のある場合については，部分的な結果はあるものの，本質的な部分は依然として手つかずのままである．本研究課題の第３の成果として，川原雄一朗氏と共同で，質量共鳴下においても解のエネルギーが有限に留まるための非線型項の形状に関する一つの十分条件を得ることができた．この方面の先行研究としてフランスの Delort 氏のグループも(別の)十分条件を得ており ，彼らはそれを「零条件」と呼んでいるが，その条件は(具体的に非線型項が与えられた時にそれが彼らの条件を満たすか否かを確認することが容易でないという意味で)あまり見通しの良い条件とは言い難いものであった．今回我々が得た結果は Delort 氏達の条件を真に含むばかりでなく，(上述の意味で)はるかに見通しの良い条件になっている．この成果は“ Global solutions for two-dimensional nonlinear Klein-Gordon systems in the presence of mass resonance ”と題する論文にまとめて国際誌に投稿する予定であり，現在その準備中である．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）


① H.Sunagawa: “The lifespan of solutions to nonlinear Schrodinger and Klein-Gordon equations,” Hokkaido Math. J., vol.37, no.4, p.825-838 (2008), 査読有り．

② N.Hayashi, P.I.Naumkin, H.Sunagawa : “On the Schrodinger equation with dissipative nonlinearities of derivative type,” SIAM J. Math. Anal., vol.40, no.1, p.278-291 (2008), 査読有り．

③ 砂川秀明：非線型 Klein-Gordon 方程式の解の長時間挙動について，日本数学会「数学」 第 59 巻 4 号，367-379 頁 (2007)，査読有り．

④ Y.Kawahara, H.Sunagawa: “Remarks on global behavior of solutions to

nonlinear Schrodinger equations,"
Proc. Japan Acad. Ser.A, vol.82, no.8, p.117-122 (2006), 査読有り.

〔学会発表〕(計４件)

① 砂川秀明「双曲型および分散型方程式の非線型摂動について」奈良偏微分方程式研究会, 2008年3月20日, 奈良女子大学.
② H.Sunagawa, "On the Schrodinger equation with dissipative nonlinearities of derivative type," International conference on nonlinear wave equations, 2007年8月27日, 北海道大学.
③ H.Sunagawa, "On cubic NLS and NLKG with dissipative structure," JAMI conference on nonlinear dispersive equations, 2007年3月17日, ジョンズ ホプキンス大学.
④ 砂川秀明 「Lifespan の漸近評価から見た非線型 Schrodinger 方程式とその周辺」日本数学会 2006年度秋季総合分科会(函数方程式論分科会特別講演), 2006年9月22日, 大阪市立大学.

６．研究組織

(1)研究代表者

砂川　秀明（SUNAGAWA HIDEAKI）
大阪大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：８０３７５３９４