様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成 21 年 5 月 29 日現在

研究種目：若手研究 (B)
研究期間：2006 〜 2008
課題番号：18740071
研究課題名（和文）　単純極型作用素に対する完全ＷＫＢ解析

研究課題名（英文）Exact WKB analysis for simple-pole type oprators

研究代表者
小池 達也 (KOIKE TATSUYA)
神戸大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号：80324599

研究成果の概要：完全 WKB 解析における単純極型作用素の問題に取り組み、高階単純極型作用素の分解定理について論じた。特に、係数が全て単純極であるような一番簡単な場合は二階の単純極型作用素と正則係数作用素に分解できることを示し、それを用いて単純極を端点とする Stokes 曲線での接続係数を決定した。それ以外の場合についても分解して得られる二階の単純極型作用素の決定を行なうなど、特異点における解析の進展に寄与した。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	1,000,000	0	1,000,000
２００７年度	800,000	0	800,000
２００８年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総　計	2,600,000	240,000	2,840,000

研究分野： 数物系科学
科研費の分科・細目：数学・基礎解析学
キーワード：完全 WKB 解析、Borel 和、漸近解析、単純極型作用素

1. 研究開始当初の背景

この研究で取り扱った単純極型作用素とは典型的には係数が単純極を持つような作用素のことであり、一般には確定特異点と変わり点が合流の結果として得られる作用素である。完全 WKB 解析の観点からは、そのような特異点は変わり点としての特徴も持つことが期待され、二階のそれについてはポテンシャルが

$$Q(x,\eta) = \frac{Q_0(x)}{x} + \eta^{-1}\frac{Q_1(x)}{x} + \eta^{-2}\frac{Q_2(x)}{x^2}$$

(η は大きいパラメータで、$Q_j(x)$ が原点で正則かつ $Q_0(0) \neq 0$) の場合のシュレーディンガー型の方程式についての研究があり、Stokes 曲線や接続係数などが決定されていた (T. Koike, On the exact WKB analysis of second order linear ordinary differential equations with simple poles, Publl. RIMS, Kyoto Univ., **36**(2000), 297–319)。(それらの成果は Heun の方程式の固有値問題などに応用されていた (T. Koike: Asymptotics of the spectrum of Heun's equation and the the exact WKB analysis, "Toward the Exact WKB Analysis of Differential Equations, Linear or Nonlinear", Kyoto Univ. press, 2000, pp.55-70)。) このように二階の場合の単純極型作用素はある程度の結果が得られていた。

2. 研究の目的

確定特異点と変わり点が合流の結果現われるという意味でも単純極型作用素は自然な対象であると考えられる。そこで、どのような問題設定が与えるかも含めて高階作用素の完全 WKB 解析による一般論の構築を与え、それにより接続係数を決定するという局所理論を解明することが目的の一つであった。また、それらの結果を微分方程式の大域的な問題へ応用するという大域理論も研究の目的にあった。

3. 研究の方法

完全 WKB 解析では形式解には Borel 総和法を用いる。このように Borel 総和法を用いるのがこの分野の一つの大きな方法論である。また、高階方程式の変わり点の問題を局所的に扱う際には、作用素の「分解定理」を用いて二階の作用素の問題に帰着させる。単純極型作用素も (少なくともナイーブには) 変わり点としての性質を持つため、このような方法論が有効であろうと期待できる。そこでこの分解定理をまず確立し、問題を二階のそれに帰着させるという方法をとった。

4. 研究成果

(1) **分解定理**

大きいパラメータ η を含む高階線形作用素

$$P = \frac{d^m}{dx^m} + \eta\, a_1(x,\eta)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \cdots + \eta^m\, a_m(x,\eta)$$

を考える。ここに係数 $a_j(x,\eta)$ $(1 \le j \le m)$ は

$$a_j(x,\eta) = a_{j,0}(x) + \eta^{-1}a_{j,1}(x) + \cdots$$

と η の逆巾で展開され、$xa_{j,k}(x)$ は原点のある近傍で正則であり、さらに $a_{1,0}(x)$ は原点で正則、また、$\mathrm{Res}_{x=0}a_{2,0}(x) \neq 0$ と仮定する。このような作用素 P を階数 m の (S) 型の単純極型作用素と呼ぶ。作用素 P が階数 m の (S) 型の単純極型作用素とするとき、原点のある近傍において P は次のように分解される。

$$P = P' \cdot R$$

ここに R は階数 2 の (S) 型の単純極型作用素、また、P' は係数が階数 $m-2$ の係数が正則な線形作用素である。これが (S) 型の単純極型作用素の分解定理である。この分解により問題は R の解析へと帰着され、「1. 研究開始当初の背景」で述べた結果を用いることで、P の WKB 解の Stokes 曲線を横切る際の接続公式が得られる。

また、原点で確定特異点を持つ作用素

$$P = x^m\frac{d^m}{dx^m} + \eta x^{m-1}\, a_1(x,\eta)\frac{d^{m-1}}{dx^{m-1}} + \\ + \cdots + \eta^m\, a_m(x,\eta)$$

を考える。ここに

$$a_j(x,\eta) = a_{j,0}(x) + \eta^{-1}a_{j,1}(x) + \cdots$$

の各係数 $a_{j,k}(x)$ は原点で正則であり、

$$F_0(x,\theta) = \theta^m + a_{j,0}(x)\theta^{m-1} + \cdots + a_{m,0}(x)$$

とおくとき $F_0(0,\theta) = 0$ は $\theta = 0$ を重根 (重複度は 1) として持つものとする。このような P を (L) 型の単純極型作用素と呼び、やはり (L) 型の二階の作用素 R を用いて

$$P = P' \cdot R$$

と分解できる。この R をシュレーディンガー型に書き直し、さらに独立変数のスケーリングを用いるとそのポテンシャルは

$$Q(x,\eta) = \frac{1}{x} + \eta^{-1}\frac{\alpha(\eta)}{x^2},$$

$$\alpha(\eta) = \alpha_0 + \eta^{-1}\alpha_1 + \cdots$$

の形になる。従って、これは「1. 研究開始当初の背景」で述べたような従来より知られている作用素ではなく、新しいタイプの方程式であり今後の研究課題である。

以上の結果は京都大学の河合隆裕氏と竹井義次氏との共同研究であり、現在投稿中である (数理解析研究所プレプリント RIMS-1658)。また、(L) 型の単純極型作用素の研究で得られた新しいタイ

プの二階の単純極型作用素についても研究が進展中である。

(2) **ある二階方程式の Voros 係数と MPPT 方程式について**　クーロンポテンシャルを持つ二階のシュレーディンガー方程式は、独立変数の適当なスケーリングによりポテンシャルが

$$Q(x,\eta)=\frac{1}{4}+\frac{\alpha}{x}+\eta^{-2}\frac{\beta}{x^2}$$

である方程式に帰着できる。このようなシュレーディンガー方程式に対して、それに付随するリッカチ方程式の解を

$$S(x,\eta)=\eta S_{-1}(x)+S_0(x)+\eta^{-1}S_1(x)+\cdots$$

と定めた時、

$$V=\int_{-4\alpha}^{\infty}(S_{\mathrm{odd}}(x,\eta)-\eta^{-1}S_{-1}(x))dx$$

が Voros 係数と呼ばれるものである。一般に Voros 係数は WKB 解の Borel 変換の解析的な性質を調べる際に本質的な役割を担う重要な対象である。上述のポテンシャルの場合はこの Voros 係数が

$$V=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{B_{2n}(-\gamma)}{2n\cdot(2n-1)}(\alpha\eta)^{1-2n}$$

で与えられることを示した。ここに $B_{2n}(z)$ は $2n$ 次の Bernoulli 多項式であり、γ は $\gamma(\gamma+1)=\beta$ を満たす数である。これはウェーバー方程式の場合の佐藤による予想に対応するものであり、証明は佐藤の予想を示す際に竹井氏により用いられた昇降演算子を使って与えることができる。

この Voros 係数の明示的な式を用いることで上述の方程式の WKB 解の Borel 変換の解析的な性質を、例えば WKB 解の Borel 変換の “動かない特異点” や、その “動かない特異点” での alien derivative を求めることができた。

さらに、近畿大学の青木貴史氏、京大の河合隆裕氏と竹井義次氏による MPT 方程式の研究 (2008) を踏まえて、上記結果を二階の MPPT 方程式 (Schrödinger equations with a merging pair of a simple pole and a simple turning point) に応用した。MPPT 方程式とはあるパラメータを含んだシュレディンガー型の常微分方程式であり、そのパラメータを零にする時ポテンシャルの単純極と単純な零点が合流するようなものを言う。(例えば、上記ポテンシャルは $\alpha\to 0$ において単純極 $x=0$ と単純な零点 $x=-4\alpha$ が合流する。) MPPT 方程式を上記方程式に (完全 WKB 解析の意味で) 変換することを示した。それにより MPPT 方程式の WKB 解の Borel 変換の “動かない特異点” や、その “動かない特異点” での alien derivative を考察することができる。(但し、技術的な問題から現時点で MPPT 方程式についてわかるのは、WKB 解の Borel 変換の基準点に十分近い動かない特異点のみに限られる。)

以上の結果は東大の神本晋吾氏、京大の河合隆裕氏と竹井義次氏との共同研究であり、現在投稿準備中である。また、この研究で得られた経験や手法は項目 (1) の最後で述べた新しいタイプの方程式の解析にも用いられる。

(3) **クーロンポテンシャルの研究**　ジョン・ホプキンス大学の Silverstone 教授と共同でクーロンポテンシャルを持つシュレーディンガー方程式を調べ、その WKB 解析の研究を行なった。クーロンポテンシャルに対する WKB 近似法はシュレーディンガー方程式が提唱された直後という、かなり早い時期に Langer により行なわれ、今日では Langer 補正として知られる。この Langer 補正は WKB 近似解において各運動量項 $l(l+1)$ を $(l+1/2)^2$ に取り替るというもので、応用において非常に有用であったが、他方でその数学的な意味付けや、より高次の近似を与える問題については様々な議論が行なわれてきた。近似法としてプランク定数による展開の最初の項を用いるのではなく「全ての次数を考える」ことで「Langer 補正はそもそも必要ではない」と認識されるようになったのはごく最近のことである。この研究では、より高次の近似を与えるメカニズムの解明やまた過去の研究では Borel 変換という今日の漸近展開論の一つの主流の視点が欠けたものであることなどを論じた。この研究は現在投稿準備中である。

(4) **パンルベ階層の研究**　パンルベ階層 ($(P_{\mathrm{I}})_m$, $(P_{\mathrm{II}})_m$, $(P_{34})_m$, $(P_{\mathrm{IV}})_m$) は様々な可積分系を背景に持つ方程式の列であり、各メンバーとなる方程式は高次のパンルベ方程式の一つとして知られており、高階の非線型常微分方程式の例として興味深いものである。これらの方程式はある種の退化 Garnier 系 (これは非線型の偏微分方程式系である) を複素直線に制限することで得られることを示した。それにより例えばパンルベ階層のハミルトン系が得られるが、そのハミルトン系は Lax

対などは京都大学の河合氏と竹井氏によりパンルべ階層の WKB 解析の研究に有効に用いられた。

本研究課題の観点から言えば、高階の非線型常微分方程式の「単純極」の問題にまで踏み込めなかったのは残念である。その準備段階である舞台の設定と解析で終わってしまったので、今後また機会を見て研究を進めていきたいと考えている。

5. 主な発表論文等

[雑誌論文] (計 3 件)

(1) T. Koike, *On new expressions of the Painlevé hierarchies*, Kôkyûroku Bessatsu, **B5** (2008) 153–198. (査読あり)

(2) T. Aoki, N. Honda, T. Kawai, T. Koike, Y. Nishikawa, S. Sasaki, A. Shudo, Y. Takei, *Virtual Turning Points — A gift of microlocal analysis to the exact WKB analysis*, Algebraic Analysis of Differential Equations (Eds. T. Aoki, H. Majima, Y. Takei and N. Tose), pp.29–43, Springer, 2008. (査読あり)

(3) T. Koike, *On the Hamiltonian structures of the second and the fourth Painlevé hierarchies and degenerate Garnier systems*, Kôkyûroku Bessatsu, **B2** (2007) 99–127. (査読あり)

[学会発表] (計 15 件)

(1) 小池 達也: On the explicit forms of the Voros coefficients of the Coulomb potential in exact WKB analysis, 超幾何方程式研究会 2009, 神戸大学, 2009 年 1 月 7 日, 一般講演.

(2) T. Koike: Asymptotic behavior of the hyperbolic Schwarz map at irregular singular points (joint work with T. Sasaki and M. Yoshida), Foundations of exact WKB analysis and resurgence theory, 関西セミナーハウス, 2008 年 12 月 15 日, 招待講演.

(3) T. Koike: On the explicit forms of the Voros coefficients of the Coulomb potential in exact WKB analysis, Seminar on Singular Perturbations — Special weeks on parametric resurgence — 京都大学, 2008 年 9 月 29 日, 招待講演.

(4) 小池 達也: Painlevé hierarchies, degenerate Garnier systems and WKB analysis 日本数学会秋季総合分科会, 特別講演, 東京工業大学, 2008 年 9 月 24 日, 招待講演.

(5) T. Koike: On the explicit forms of the Voros coefficients of the Coulomb potential in exact WKB analysis Workshop on New approach to analytic equations – transformation theory, singular solutions and Stokes problem, 京都大学数理解析研究所, 2008 年 9 月 18 日, 招待講演.

(6) T. Koike: On the eigenvalue problem of the Coulomb potential and exact WKB analysis, International Workshop on Global Behaviors of Differential Equations – Singularity and Transformation Theory–, 広島大学理学研究科, 2008 年 9 月 10 日, 招待講演.

(7) T. Koike: P_{34}-hierarchy, degenerate Garnier systems and WKB analysis. 研究集会「完全 WKB 解析と超局所解析」, 京都大学数理解析研究所, 2008 年 5 月 27 日, 招待講演.

(8) 小池 達也: クーロンポテンシャルに対する固有値問題と完全 WKB 解析, 九州大学大学院数理科学研究院談話会, 九州大学, 2008 年 4 月 23 日, 招待講演.

(9) T. Koike: On the eigenvalue problem of the Coulomb potential and exact WKB analysis Holomorphic partial differential equations, small divisors and summability, CIRM (フランス), 2008 年 1 月 29 日, 招待講演.

(10) 小池 達也: 単純極型作用素の完全 WKB 解析について, 超幾何方程式研究会 2008, 神戸大学, 2008 年 1 月 7 日, 一般講演.

(11) T. Koike: On Painlevé hierarchies and the degenerate Garnier systems ”Differential Equations and Asymptotic Analysis”, 京

都大学数理解析研究所, 2007 年 12 月 17 日, 招待講演.

(12) T. Koike: Higher order Painlevé equations and the degenerate Garnier systems 微分方程式系の代数解析と完全 WKB 解析, 京都大学数理解析研究所, 2007 年 12 月 13 日, 招待講演.

(13) 小池 達也: クーロンポテンシャルに対する固有値問題と完全 WKB 解析, 神戸大学理学研究科数学教室談話会, 神戸大学, 2007 年 10 月 31 日, 招待講演.

(14) 小池 達也: On the Hamiltonian representation of the second and fourth Painlevé hierarchies 京都解析コロキウム, 京都大学 2006 年 6 月 17 日, 招待講演.

(15) T. Koike: On the Hamiltonian representation of the second and fourth Painlevé hierarchies, 平成 18 年度日仏セミナー「Algebraic, Analytic and Geometric Aspects of Complex Differential Equations and their Deformations, Painlevé Hierarchies」, 京都大学数理解析研究所, 2006 年 5 月 16 日, 招待講演.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

小池 達也 (KOIKE TATSUYA)
神戸大学・大学院理学研究科・准教授
研究者番号: 80324599

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者