様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年６月２０日現在

研究種目：若手研究（B）

研究期間：　２００６　～　２００８

課題番号：１８７４００７３

研究課題名（和文）　積分変換の大域理論による高階分散型方程式の解の特異性伝播

研究課題名（英文）　Propagation of singularities to dispertive equations of higher orders via the global theory of integral transformations

研究代表者

研究成果の概要：

FBI 変換と呼ばれる複素相関数をもつ積分変換を研究し、偏微分方程式の解の特異性伝播の一種である、解の平滑効果を検証した。特に、従来研究成果の少なかった高階分散型方程式を考察の中心に置いた。また、研究経過の中で新たに現れた問題である、FBI 変換を用いた逆問題の考察も行った。

その結果、幾何学的散乱理論の枠組みで、高階分散型方程式の解の特異性について、遠方での初期値の減少度と解の解析性の関連を調べることができた。また、この枠組みでの分散型方程式と呼べる枠組みについて、一般的な考察をした。また、複素相関数に関する考察を行うことで、係数決定逆問題への応用を示すことができた。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
２００６年度	700,000	0	700,000
２００７年度	700,000	0	700,000
２００８年度	600,000	180,000	780,000
年度			
年度			
総　計	2,100,000	180,000	2,280,000

研究分野：　数物系科学

科研費の分科・細目：　数学・基礎解析学

キーワード：　偏微分方程式論、ＦＢＩ変換、解の特異性伝播、複素幾何光学、逆問題

１．研究開始当初の背景

（１）解の特異性伝播について

偏微分方程式論、線形理論および非線形理論において、シュレディンガー方程式の解の平滑効果は、多くの研究者が注目している現象の一つであった。

その理由の１つは、非線形理論においては、解の性質を論じる際に解の平滑効果を考慮しないで考察した場合の結果と異なり、扱える非線形項の枠組みが広がることである。一方線形理論の枠組みからいうと、解の平滑効果は特異性伝播の新しい応用といえた。しかしながら、特異性が速さ無限大で伝わると解釈されるこの現象は、大域理論の一種であり、変数係数の作用素に対して、解の平滑効果を説明することは難しかった。

（２）ＦＢＩ変換

ＦＢＩ変換自体は、複素相関数をもつ積分変換、Fourier 積分作用素ともいえ、１９８０年くらいに現れ、偏微分方程式の特異性伝播、とりわけ楕円型や双曲型方程式が考察の対象に置かれてきた。一方２０００年辺りに、Robbiano-Zuily 等によってＦＢＩ変換を通常とは異なった問題に適応する試みもなされていた。たとえば、係数の解析性がある場合の解の一意性などの研究がそれにあたる。

今回の研究テーマは、今まで用いられることの少なかったＦＢＩ変換を、分散型方程式の解の平滑効果の検証に用い、また新しい解の特異性伝播現象を明らかにすることが当初の背景である。

（３）幾何学的散乱理論

ユークリッド空間における散乱理論を Melrose 等が、より幾何学的にこの問題をとらえることを提案した。ユークリッド空間における無限遠方をコンパクト化した多様体、つまり散乱計量を境界近くでとる多様体上の波動方程式の散乱理論を構築すること提案した。

その研究を通して、Wunsch がシュレディンガー方程式についても同様の考察を始めた。その研究を踏まえ、Robbiano-Zuily によってＦＢＩ変換をこの枠組みで考える研究が提案された。

研究の開始時期は、幾何学的散乱理論によって、どれほどの新しい成果が得られるのか、多くの研究者が注目を始めた時期でもあった。また、ユークリッド空間の従来の理論の検証の役割としても注目されていた。

（４）研究代表者の関連する背景となる研究

ＦＢＩ変換による解の特異性伝播について考察していた。特に高階分散型方程式を対象に研究を行っていた。これらの研究は、一般の作用素を研究の対象にしていたが、通常のユークリッド空間における作用素を対象としていた。Robbiano-Zuily 等との研究交流により、より広い枠組みでのこれらの理論の拡張を目標とする機運があった。

２．研究の目的

（１）幾何学的散乱理論による分散型方程式の特異性伝播について

従来あまりなされてこなかった一般高階分散型方程式の特異性伝播現象を詳しく調べる。また、そこで用いられる大域的積分変換であるＦＢＩ変換についても考察する。特に、従来の局所理論では捉えきれなかった大域的性質について特に注目する。

幾何学的散乱理論を視野に入れた特異性伝播理論を考察し、その興味あるモデルケースとして、一般高階分散型方程式の特異性伝播現象の散乱多様体上での性質を調べる。つまり、幾何学的散乱理論の枠組で、分散型方程式の解の特異性を考察する事である。

（２）複素相関数の幾何とその応用

分散型方程式の問題は、特異性が速度無限大で伝播すると解釈できるので、必然的に大域的考察を必要とする。これらの大域的考察で得られる手法は、他の問題への応用が期待される。これらの応用についても考察する。

より具体的には、大域的積分変換に多く現れる複素相関数の幾何学的、及び解析学的な性質に着目し、この相関数を用いて定義される漸近解を大域的に構成する。またこの構成した漸近解を用いて、解の特異性伝播及び係数決定逆問題への応用を調べることである。

それに加え、得られた考察でとらえられる散乱計量の下での高階分散型方程式の枠組みを提案し、解の特異性を得ることを目標とする。同時に、上記の問題より派生してきた係数決定逆問題への応用を考察する。

３．研究の方法

以下の項目に分けて研究を進めた

（１）ＦＢＩ変換の基礎理論の考察

特性曲線の幾何学

熱方程式の特異性伝播
（２）幾何学的散乱理論の枠組み
高階変数係数楕円型作用素の特性曲線の軌道の考察
分散型方程式の特異性と解の大域的挙動の関係
（３）複素相関数の幾何学的考察
（４）複素相関数の理論の応用
係数決定逆問題への応用

個人研究ではあるが、理論の検証を客観的に行うため、下記の研究者に意見を求めて研究を進めた。
Claude Zuily 氏（Paris Sud Univ., France)
Jenn-Nan Wang 氏（National Taiwan Univ., Taiwan)
中村 玄 氏（北大理)

研究成果については、出版物として公表する前に、上記の研究者に意見を求めるだけでなく、私的なセミナー等で積極的に公開した。したがって、最終結果には残っていない研究成果も含まれる。

４．研究成果

研究成果は次のように分けられる
- 幾何学的散乱理論の枠組みにおける高階分散型方程式の特性曲線の大域的挙動とその性質
- 幾何学的散乱理論の枠組みにおける高階分散型方程式の特異性伝播
- 複素相関数の理論の考察と逆問題への応用

また、上記に関連するユークリッド空間における対応する現象も考察した。

（１）準備的成果
分散型方程式を考察する準備として、熱方程式の解の特異性について、FBI 変換の手法を詳しく検討し、新しい結果を得た。この考察を通して、複素相関数の幾何学の手法が理解が深まった。
また、分散型方程式の特異性伝播の現象は、熱方程式に代表される放物型方程式の特異性伝播現象と同様の現象であることが確かめられた。それだけでなく、これらの特異性伝播現象は、従来の双曲型、楕円型方程式の特異性伝播現象である有限伝搬性などを、速度無限大になった場合というように、統一的に解釈できるようになった。これらの研究成果は論文④にまとめられている。

（２）幾何学的散乱理論の枠組みにおける分散型方程式について
積分変換の大域的構成にとって不可欠な、複素幾何光学解について考察を行い、一連の結果について研究発表や論文をまとめた。また、当初の目的であった分散型方程式の特異性伝播に関する考察も行った。
最初の研究計画では、複素幾何光学を利用して、従来のように特異性の伝播を考察することが目的であった。この研究に関して、最近類似の結果が得られたとの情報が、詳しく検討を行った結果、扱える分散型方程式の枠組みが、今回の研究成果で得られたものの方が優れていることがわかった。より詳しくは、主要部がラプラシアンのべき乗とは限らない作用素の特性曲線の詳細な挙動を明らかにすることで、今まで得られなかったタイプの分散型方程式に関する特異性伝播現象を説明することが可能となった。つまり、従来理論の適応範囲を広げることができた。しかしながら、分散型方程式の特徴付けは途中結果となってしまった。
この原因は、分散型方程式の特殊性にあると思われ、今後の課題として残った。

（３）複素相関数の理論の応用
また、一連の Wang 氏(Taiwan)等との共同研究によって、複素幾何光学解の新しい構成法を提案することが出来た。この構成法は、工学的逆問題に応用されるなど、当初の期待以上の成果を上げることができた。この構成法では、分散型方程式の特異性伝播を考察する過程で、ＦＢＩ変換を詳しく検討した結果ともいえる。
これらの結果を学術論文等で発表した。この種の応用は、数学的逆問題において、多くの研究者の興味を集め始めている。特に、大域的積分変換であるＦＢＩ変換を新しい問題に適応するという、次への問題を提供した点でも意義深いといえる。
新しく Prof. Ferreira (Paris Nord Univ., France) との研究も始まった。この研究は研究課題の終了後も継続中である。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 5 件）

① H. Takuwa, G. Uhlmann, and J.-N. Wang, Complex geometrical optics solutions for anisotropic

equations and applications, (J. Inv. Ill-Posed Problems に掲載決定済み, total 14p.). (査読あり)

② H. Takuwa, Construction of a limiting Carleman weight, 京都大学数理解析研究所考究録「Spectral and Scattering Theory and Related Topics」no.1607 (2008), 142--150. (査読なし)

③ H. Takuwa, Construction of a limiting Carleman weight, Seminar Notes of Mathematical Science 11, 茨城大学 (2008), 118--125. (査読なし)

④ H. Takuwa, Singularities of parabolic equations and dispersive equations via the FBI transform , Seminar Notes of Mathematical Science 10, 茨城大学 (2007), (total 8p.).(査読なし)

⑤ H. Takuwa, Microlocal analytic smoothing effects for operators of real principal type. Osaka J. Math. 43 (2006), no. 1, 13--62. (査読あり)

〔学会発表〕(計　２　件)

① H. TAKUWA, Construction of a limiting Carleman weight, 京都大学数理解析研究所共同研究事業「スペクトル・散乱理論とその周辺 － Spectral and Scattering Theory and Related Topics」, 京都大学 2008 年 1 月.

② 多久和英樹, 係数同定逆問題で使われる Limiting Carleman weight の構成について,数理科学セミナー、 同志社大学 2007 年 9 月

〔図書〕(計　０　件)

〔産業財産権〕

○出願状況（計　０　件）

〔その他〕

なし

６．研究組織

(1)研究代表者

多久和　英樹　 (TAKUWA HIDEKI)

同志社大学・理工学部・准教授

研究者番号：８０４０３１１１

(2)研究分担者

なし

(3)連携研究者

なし