

平成21年 5月 25日現在

研究種目：若手研究（B）
 研究期間：2006～2008
 課題番号：18740078
 研究課題名（和文） 不動点理論に基づく非線形関数解析学および非線形問題の研究
 研究課題名（英文） Nonlinear Functional Analysis and Nonlinear Problem
 by Fixed Point Theory

研究代表者

厚芝 幸子 (ATSUSHIBA SACHIKO)
 山梨大学・教育人間科学部・准教授
 研究者番号：20327761

研究成果の概要：

本研究では、不動点定理・不動点理論に関する非線形関数解析学の基礎理論を体系的に構成し、それをもとに、不動点近似に関する多くの成果を得られた。つまり、非線形問題へ結びつく、不動点への弱収束定理および強収束定理や不動点の存在に関する多くの研究成果を得られた。さらにその得られた不動点理論・不動点近似の成果の立場から非線形最適化問題、制約可能性問題、経済均衡問題等の非線形問題を再構成して、不動点近似に帰着させる形で非線形問題の解への収束定理に関する成果まで得られた。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,200,000	0	1,200,000
2007年度	700,000	0	700,000
2008年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総計	2,600,000	210,000	2,810,000

研究分野：基礎解析学

科研費の分科・細目：数学・基礎解析学

キーワード：不動点、非拡大写像、擬非拡大写像、非線形最適化問題、弱収束、強収束
 擬射影、制約可能性問題

1. 研究開始当初の背景

種々の非線形問題の研究は計算機と非線形数学の進歩とともに近年注目され、研究されつつある。不動点理論は非線形数学の中で中核をなすものの1つであり、近年不動点理論の進歩はめざましい。最適化問題、制約可能性問題、経済均衡問題、像再生問題、フラクタル、カオス、常微分や偏微分方程式の問題などの非線形問題の多くは各々何らかの非線形写像の不動点の問題と

捉えられ、その問題の解をもとめることは不動点近似に繋がるものである。そのような状況を睨み、不動点理論・不動点近似の立場から上で述べた非線形問題を再構成し、非線形問題の解の近似法の体系を作ることが必要だと考えられる。また、不動点定理、不動点近似がどのような設定で成立するかということは(1)で記した非線形問題がどのような設定で成立するかという問題に繋がる。Lp空間・関数空間での非線形問題の

研究は非線形関数解析学の基本定理と深く関わっていることがわかりつつあるが、統一的な議論はまだなくて未解決部分が多い。

そこで、不動点理論の立場から体系的に非線形関数解析学と種々の非線形問題を研究することは極めて有効であり、その必要性は大いに高まっていることを背景に研究してみようと考えに至った。

2. 研究の目的

本研究は、不動点定理・不動点理論に関する非線形関数解析学の基礎理論を体系的に構成し、それをもとにした不動点近似(不動点をみつけること)への帰着により、非線形問題の解をもとめることを目的とする研究である。つまり、非線形最適化問題、制約可能性問題、経済均衡問題、像再生問題、フラクタル、カオス、常微分や偏微分方程式の問題などの非線形問題を不動点理論・不動点近似の立場から再構成し、非線形問題の解の近似法の体系を作ることを目指してきた。つまり以下のことを目標としてきた。

- (1) 不動点定理、不動点近似がどのような設定で成立するか探求する。
- (2) 不動点理論・非線形エルゴード理論に関する非線形関数解析学の基礎理論の確立を目指して研究する。
 - ①非線形問題と非線形関数解析学の基本定理との関係を探求する。
 - ②最近非線形問題には有効と見込まれる写像に関して基礎性質・定理を研究する。
 - ③既存の結果よりシャープで使いやすい定理に再構成する。
- (3) 不動点をもとめる近似法の理論体系の確立を目指して研究する。

即ち、(2)②③の結果をもとに、(2)②で記した研究すべき写像に対しても不動点への収束定理が示せるか研究する。また最近有効と見込まれつつある点列近似法を適用し、収束定理を示す。
- (4) 非線形問題の解をもとめる点列近似法の再考察と発展を目指す。

具体的には、使いやすい不動点近似法・非線形問題の解の近似法を探求することで不動点近似の理論、応用の双方のさらなる発展をめざす。

2. 研究の方法

研究方法としての流れは以下の通り。

不動点近似に関係する非線形関数解析学の諸定理を不動点定理の立場から再構成し、基礎的理論体系をまず確立する。そしてそれを基に不動点および変分不等式の解をもとめる近似法の一つの体系を確立する。制約可能性

問題、像再生問題、非線形最適化問題、経済均衡問題、非線形発展方程式の解の問題などの非線形問題をこの体系・不動論の立場から再構成し、非線形問題の解の近似法の体系を確立することを目指して研究する。そのため、主に以下の工夫をしながら後述べる研究方法により進めてきた。

- (1) 書籍・雑誌・書類のほかインターネットを活用する。MathScinet, データベース, プレプリントサーバーやその他データベースを利用した情報検索, 関係分野のサイトへのアクセスにより, 情報収集をしながら位置づけなども確認しながら進めてきた。

また, 共著者, あるいは関連分野の研究者と電子メールも利用して意見交換を行いながら進めてきた。
- (2) 研究成果を国内外の研究集会などで発表することで本研究に対する意見を広く求め, 本研究について確認しながら進めてきた。
- (3) 不動点理論や非線形関数解析学だけでなく, OR等も含めた関連分野の研究集会に参加することも含め, 関連分野の研究者と交流をはかり, 関連分野の情報を収集して研究を進めてきた。

以上のような工夫をしながら, 以下のような研究方法・手順によって本研究をすすめてきた。

- (1) 前半では「不動点定理を介した非線形関数解析学の基礎理論体系の確立および種々の近似法による不動点への収束定理に関する基礎理論の確立」を目指し, 以下の課題について国内外の研究集会等で発表するなどして, 研究成果に対する意見を集めて確認したり, 関連情報を収集しながら研究してきた。
 - ①これまでの非線形問題, 特に非線形最適化問題, 制約可能性問題, 非線形偏微分方程式の問題, 経済均衡問題などを把握するべく, 数学的(関数解析学的)に再構成し, 問題点を洗い出す。
 - ②①で記した非線形問題と関連の深い非線形関数解析学の基礎定理に関し, 最近有効と見込まれる写像に対する補題・定理も成立するか研究する。
 - ③①の非線形問題の把握のため, それらと関連する非線形関数解析学の命題を関数解析学における主要な定理および種々の不動点定理の立場から見直して, 同定理の立場から特徴付ける。
 - ④最近非線形問題には有効とみなされつつある作用素・写像の基礎性質に関して出せた研究成果をもとに, 不動点理論の立場から非線形関数解析学の基本定理を見直して従来の結果よりシャープ

で使いやすい定理に再構成する。

(2) 後半は「不動点をもとめる近似法に関する理論の発展とその非線形問題への応用」という目標を掲げ、以下の課題について国際会議で発表するなど国内外の研究集会で研究成果に対する意見・周辺の情報を収集しながら研究してきた。

① (1)④で得られた基本定理及び既に得た不動点近似に関する結果の考えをもとに、Halpern タイプ、Mannタイプ、ハイブリッド法、shrinking projection 法等 非線形問題に対して最近有効性が見込まれるようになってきた点列近似法を用いて、(1)で述べた研究すべき写像に対して不動点への収束定理を導く研究をしてきた。

② (1)④の成果をもとに、制約可能性問題の解への収束定理、変分不等式の解への収束定理、均衡解への収束定理を導く研究をしてきた。

③ (1)③④⑤の結果や不動点理論に関する既存の結果を総合的に鑑みて不動点近似の理論を把握し、1つの理論体系を築くべく研究をしてきた。

④ 研究集会などを利用し、研究成果に対する意見を確認したり、周辺の情報を収集しながら研究してきた。それをもとにして、不動点近似と非線形問題の有機的な発展を目指し、非線形問題の解への収束定理を研究してきた。

4. 研究成果

2, 3で記した研究すべき写像・作用素に対して、非線形問題に有効とされる不動点近似法を適用して示せた結果やどのような設定で収束定理が示せるか研究して得られた成果について、年度順に報告する。

(1) 18年度は特に、これまでの非線形問題を的確に把握して数学的(関数解析学的)に再構成してみるとともに問題点を洗い出すことからはじめ、不動点定理・非線形エルゴード理論を介した非線形関数解析学の基礎理論体系の確立および種々の近似法による不動点への収束定理に関する基礎理論の確立を目標として掲げて研究をしてきた。これらの目標に関して、いくつもの有効な研究成果を得ることができ、主な結果は以下のものである。

① 特に、既存の補題に相当するものを見直して、一般の Banach 空間において成立するものに再構成した補題を証明し、それをもとに制約可能性問題を意識した、可算個の非拡大写像の共通不動点への強収束定理を w -mapping を用いることで、一般の Banach 空間において証明した。

② 空間の凸性もノルムの微分可能性も仮定しない、Opial 条件をみたす Banach 空間において、可算個の非拡大写像の

共通不動点への弱収束定理 w -mapping を用いて証明した。

③ Opial 条件をみたす Banach 空間において、可換な半群をパラメタとする写像族の共通不動点に関して、およびその写像族の共通不動点への収束の特徴付けについて考察した。そして空間の凸性も微分可能性も仮定しない、Opial 条件をみたす Banach 空間において、可換な半群をパラメタとする写像族の共通不動点への弱収束定理も証明した。

これらの成果はノルムの微分可能性や空間の凸性も仮定しない空間で収束定理を得られたものであり、非線形最適化問題の解を見つける問題への応用の足がかりを担っているといえる。特に、可算個の写像の共通不動点への収束定理に関するものは、制約可能性問題などの非線形問題の解への収束定理に直接結びつき、写像族の共通不動点近似に大きな役割を担っているといえる。

(2) 19年度は特に擬非核大写像の族の共通不動点近似に力を入れてすすめてきた。18年度の成果をもとに、不動点定理・非線形エルゴード理論を介して、種々の近似法による不動点への収束定理に関する基礎理論の確立を確実なものとし、およびその非線形問題への応用を目標として掲げて研究をしてきた。これらの目標に関して、いくつもの有効な研究成果を得ることができ、19年度中または20年度に論文として発表された。その主なものとしては以下の研究成果である。

① 最も主だったものは擬非核大写像の族の共通不動点近似に関するものである。既存の補題に相当するものを見直して、その擬非核大写像に関して成立するものに再構成した補題を証明し、それをもとに制約可能性問題を意識した、任意有限個の擬非核大写像の共通不動点への弱収束定理を w -mapping を用いることで Mann type 近似法で証明した。18年度の結果であるレゾルベントの零点への収束定理より、さらに踏み込んだ結果といえる。

② hybrid 法による擬非核大写像の族の共通不動点への強収束定理も証明した。これにより、非線形問題への応用の足掛かりに一定の役割を担っているといえる。

③ それぞれの結果を踏まえ、さらに可算個の擬非核大写像に対する収束定理も証明した。

これらの結果は、非線形最適化問題の解を見つける問題への応用の足がかりを担っているといえる。特に、任意有限個の写像の共通不動点への収束定理に関するものは、計装機への実装に結びつく話でもあり、制

約可能性問題などの非線形問題の解への収束定理に直接結びつき、写像族の共通不動点近似に一定の役割を担っているといえる。

(3)20年度の主な結果は以下の通りである。

①Hybrid法による収束定理については、擬射影を用いることにより、Banach空間における擬非拡大写像に対しての定理が既に得られていたが、本研究では距離射影を用いたhybrid法により、Banach空間における非拡大写像族に対して強収束定理を示した。

②まずHilbert空間において研究したが、非拡大写像族に対して、距離射影を用いたhybrid法による点列について研究し、不動点集合が空でないという仮定なしでwell-definedであることを示した。さらに、共通不動点集合が空でないための必要十分条件を確立した。

③任意有限個および加算個の擬非拡大写像に対して弱収束定理および強収束定理をBanach空間で示した。

これらの結果は、非線形問題の解を見つける問題への応用の足掛かりを担っているといえる。特にBanach空間における距離射影を用いたhybrid法による写像族の共通不動点近似に関するものは、制約可能性問題、均衡問題、最適化問題などの非線形問題の解への収束定理に直接結びつき、写像族の共通不動点近似の中で一定の大きな役割を担っているといえる。また、これらの成果が国内外の雑誌で公表されたし、内外の研究集会で発表して大変関心を持たれた。これらは、本研究が成果をあげられたことを裏付け、今後の発展的な研究に結びつくことも裏づけているといえる。また本研究で得られた成果は最近多くの論文で引用されはじめたことを報告しておく。この科学研究費補助金のお陰で、効率よく、予想以上の成果が得られたといえる。これは文献収集やこの問題に興味を持っている他大学の研究者との討論や情報交換も功を奏した結果だと思われる。多くの文献でも引用されるようになり、本研究の成果は、今後の発展的な研究に結びつくことも裏づけていると思われる。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 17 件)

- ① Sachiko Atsushiba and Wataru Takahashi, Approximating Common Fixed Points of Nonexpansive Semigroups in Banach Spaces by Metric Projections, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 査読有, Vol. 632 (2008), pp. 323-331, (On-line e-2008, (2008),

513-521).

- ② Sachiko Atsushiba, Strong Convergence Theorem for a Family of Relatively Nonexpansive Mappings in Banach Spaces, *Fixed Point Theory and its Applications*, 査読有, Vol. 8 (2008), pp. 19-28,
- ③ Sachiko Atsushiba, Approximating Zero Points of Accretive Operators by Implicit Iterative Sequences, *Taiwanese Journal of Mathematics*, 査読有, Vol. 11 (2007), pp. 807-818.
- ④ Sachiko Atsushiba and Wataru Takahashi, Weak and Strong Convergence for Nonexpansive Semigroups in a Banach Space satisfying Opial's condition, *Scientiae Mathematicae Japonicae*, 査読有, Vol. 65 (2007), pp. 147-160. (On-line e-2006, (2006), pp. 1175-1188).

[学会発表] (計 17 件)

- ① Sachiko Atsushiba, On the Sequences by the Hybrid Type Method and Convergence Theorems for Nonlinear Mappings, The International Symposium on Nonlinear Analysis and Optimization 2009, 2009. 2. 10, Pukyong National University, Korea.
- ② Sachiko Atsushiba, Approximating Common Fixed Points of Families of Nonexpansive Mappings in Banach Spaces by Metric Projections, The 9th International Symposium on Generalized Convexity and Generalized Monotonicity 2008, 2008. 7. 21, College of Science, National Sun Yat-sen University, Kaohsiung, Taiwan.
- ③ Sachiko Atsushiba, Convergence Theorems for Relatively Nonexpansive Mappings in Banach Spaces, The 8th International Conference on Fixed Point Theory and Applications 2007, 2007. 7. 16, Chiang Mai University, Chiang Mai, Thailand.
- ④ Sachiko Atsushiba, Convergence of Approximated Sequences for Nonlinear Operators in Banach Spaces. The International symposium on Nonlinear Analysis and Convex Analysis 2006, 2006. 10. 28, College of Science, National Sun Yat-sen University, Kaohsiung, Taiwan.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

厚芝 幸子 (ATSUSHIBA SACHIKO)
山梨大学・教育人間科学部・准教授
研究者番号：20327761

(2) 研究分担者

該当無し

(3) 連携研究者

該当無し