様式 C-19

# 科学研究費補助金研究成果報告書

平成　21　年　5　月　22　日現在

研究種目：　若手研究（B）
研究期間：　2006～2008
課題番号：18740081
研究課題名（和文）　流体力学に現れる非線形偏微分方程式の定常解に関する研究

研究課題名（英文）　Study on stationary solution to non-linear PDE in Fluid Dynamics

研究代表者
久保　隆徹　(KUBO TAKAYUKI)
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・助教
研究者番号：90424811

研究成果の概要：
本研究において，流体力学の基礎方程式であるナヴィエ・ストークス方程式の半空間とその摂動で与えられる領域における，時間局所解と小さい初期値に対する時間大域解の一意存在性を証明した．また，３次元以上の半空間において無限遠で全空間や外部領域よりも早く減衰する定常解の存在とその安定性を証明した．さらに，半空間の摂動として与えられる領域において，すでに得られていた定常解の小さい初期摂動に関する漸近安定性を証明した．

交付額

（金額単位：円）

| | 直接経費 | 間接経費 | 合　計 |
|---|---|---|---|
| ２００６年度 | 1,200,000 | 0 | 1,200,000 |
| ２００７年度 | 1,300,000 | 0 | 1,300,000 |
| ２００８年度 | 900,000 | 270,000 | 1,170,000 |
| 年度 | | | |
| 年度 | | | |
| 総　計 | 3,400,000 | 270,000 | 3,670,000 |

研究分野：　関数方程式
科研費の分科・細目：　数学・基礎解析学
キーワード：関数方程式・流体力学

１．研究開始当初の背景

流体力学の基礎方程式である Navier-Stokes 方程式の数学的手法による本格的な解析は，1934 年 Leray の研究によって始まった．彼は任意の初期データに対して時間大域的な弱解が少なくとも１つは存在することを証明した．Leray による弱解の構成方法は Hopf により洗練された．彼の手法はアプリオリ評価が解の存在を保証するというものであり，今日の非線形偏微分方程式論の基礎となっている．それから約 70 年もの間，多くの人々によって研究されてきたが，Leray が構成した弱解の一意性や正則性についてはいまだ解決をみていない．

一方，一意的な滑らかな解の存在も多くの人々によって研究されてきたが，初期値や外力に制限をつけて知られているのが現状である．また，領域の形状においては，２次元以上の全空間や半空間，外部領域，また３次元以上の aperture domain においては，時間局所解や小さい初期値に対する時間大域解の一意存在性が示されている．私は今まで半空間やその摂動として与えられる領域に興味があり，それらの領域について考察を行ってきた．とくに， perturbed half-space や aperture domain といった領域において考

察を行った．perturbed half-space は原点近傍に摂動がある半空間であり，aperture domain は２つの半空間が原点近傍でつながっている領域である．これらの領域における研究は今までほとんどされていなく，特に perturbed half-space については全く研究がされていなかった．しかし， perturbed half-space は物理的に, aperture domain は数学的にとても重要な領域である．実際，peruturbed half-space は高層ビル群や富士山の周りなどの状況に対応する．また，aperture domain はよく研究されている全空間や外部領域などの領域と違い, flux 条件などの付帯条件が必要であることが知られている．この点において，数学的に重要な領域であると考えられる．

また，半空間にも重要な問題がいくつも残されている．たとえば定常解の存在については３次元の場合にのみ証明がなされているだけである．外部領域では，３次元以上の場合において柴田良弘氏，小薗英雄氏，山崎昌男氏などにより多くの研究がなされている．しかし，２次元の場合については Stokes’s paradox との関連から定常問題は解かれていない．その理由の１つにあげられるのが，全空間における２次元 Stokes 方程式の基本解に log x の項が現れてしまうためである．

一方，私の今まで行ってきた研究から半空間における２次元 Stokes 方程式の基本解には|log x|の項が現れないことが分かっており，全空間のケースよりも良い挙動をしているように思われる．したがって，定常解の存在についての研究も外部領域より良い性質をもつ定常解の存在を示すことが期待できる．

## ２．研究の目的

私の研究の根幹にあるテーマは，流体力学の数学的な理論の大きなテーマの１つである「領域の形状と流体の流れとの関係」である．Navier-Stokes 方程式は，全空間やその摂動として与えられる外部領域において，多くの研究の蓄積がある．しかし，その一方半空間やその摂動として与えられる領域，特に perturbed half-space や aperture domain などの領域では，外部領域と比較すると研究の蓄積が少ない．そのため，「領域の形状と流体の流れの関係」に対して，数学的に十分に解答を与えることはできていない．

本研究では，そのテーマへの数学的解答を与えるべく，半空間からの摂動として与えられる領域において，時間局所解の存在や小さい初期値に対する時間大域解の存在，定常解の存在やその安定性について考察を行うことを目的とする．

## ３．研究の方法

この研究は，半空間での解の表現公式が基盤にある．今まで半空間の解の表現公式としては，鵜飼正二氏の公式がよく知られていたが，私たちの表現公式は鵜飼氏の公式とは違った，より具体的な表現となっている．そのため解析もしやすい．その公式を用いて，小さい初期値に対する時間大域解の一意存在や安定性の議論に必要な評価を得ることが第１段階である．その評価を用いて次のことを考える．

(1) <u>２次元以上の apeture domain での時間局所解と小さい初期値に対する時間大域解の一意存在性について</u>

今まで行ってきた研究において，２次元以上の perturbed half-space において時間局所解と小さい初期値に対する時間大域解の一意存在性を証明した．その手法は，次の段階を経る：①半空間の解と有界領域の解を cut-off テクニックを用いて perturbed half-space での解を作る．その際に領域が半空間からのコンパクトな摂動であることを用いて，誤差項を処理する．②その解を用いて局所エネルギー減衰定理やストークス半群の $L_p$-$L_q$ 評価を求める．③加藤の方法に従って，時間局所解と小さい初期値に対する時間大域解の一意存在を証明する．

２次元以上の aperture domain においても perturbed half-space と同じ手法を用いることで flux が０である場合の時間局所解と小さい初期値に対する時間大域解の一意存在を証明する．

(2) <u>２次元以上の aperture domain において non-0 flux 条件を課した場合の時間局所解の存在について</u>

Aperture domain という領域はその形状から，半空間や外部領域などとは違った性質をもつことが知られている．その性質の１つは, Flux 条件, または無限遠での圧力降下条件を課さなければ，定常 Stokes 方程式でさえ一意性を示すことが出来ないということである．その Flux 条件などの付帯条件下では，Farwig-Sohr により Helmholtz 分解が成立することが示されている．(1)において０ flux の場合の時間局所解と小さい初期値に対する時間大域解の存在は証明されている．この延長として，flux 条件を non-zero Flux 条件の場合における時間局所解の一意存在を逐次近似法を用いて示す．

(3) <u>３次元以上の半空間での定常解とその安定性について</u>

定常解については無限遠での減衰度に興味をもって研究を行う．定常解の研究は今まで全空間や外部領域を中心に行われ，半空間で

の研究はChenによる研究だけであった．彼の研究では，３次元の半空間に限定して研究がなされており，減衰度については半空間の定常解は全空間のものに比べ１つだけ良いものになっていることが示されている．しかし，これは背理法を用いて行われており，具体的に定常解を構成しているわけではない．本研究において，３次元以上の半空間の解の表示を具体的に求めることで，全空間より減衰度のよい定常解の存在を証明する．

また，定常解の安定性については，いくつかの結果が知られている．例えば，小薗英雄氏・小川卓克氏により外部領域における Navier-Stokes 方程式の解の安定性が示されている．彼らの手法は，定常解が $L^n$ 空間に属していることを用いて，摂動 Navier-Stokes 方程式に対応する半群の $L^p$-$L^q$ 評価を示し，その評価を用いて，加藤の方法に従って定常解の漸近安定性を証明している．半空間でも同じ方法に従って証明する．

(4) <u>２次元 aperture domain での定常解の安定性について</u>

２次元 aperture domain において，$x_2$ 軸に対して対称であれば，小さい flux をもつ定常解の存在が知られている．この定常解は無限遠で $1/|x|$ の減衰をもつことが知られているが，これは $L^2$ 空間に属してはいない．そのため，外部領域などで知られている方法を用いることができない．しかし，この定常解は弱 $L^2$ 空間に属していることはわかるので，その空間において安定性を証明することを考える．

４．研究成果

(1) <u>２次元以上の aperture domain での時間局所解と小さい初期値に対する時間大域解の一意存在性について</u>

２次元以上の aperture domain において，時間局所解と小さい初期値に対する時間大域解の一意存在性を証明することができた．また，無限遠での漸近挙動についても，半空間や perturbed half-space などと同じものが得られた．ここで特筆すべきことは２点ある．１つは，無限遠での漸近挙動において，外部領域では一階微分に関する評価においては空間の指数に制限が必要であったのに対し，aperture domain では，そのような制限を外すことができた点である．もう一つは，２次元で３次元以上と同等の評価を得ることができた点である．

(2) <u>２次元以上の aperture domain において non-0 flux 条件を課した場合の時間局所解の存在について</u>

２次元以上のaperture domainにおいて，fluxが０でない場合の時間局所解の存在を証明することができた．これは，小さい与えられたfluxを満たすような関数が構成されているので，それを用いてfluxがない場合，つまり(1)の 場合に帰着させ，証明することができた．時間大域解についても同様に証明することはできるが，fluxが解と同等の減衰度をもたなければ示すことはできなかった．

(3) <u>３次元以上の半空間での定常解とその安定性について</u>

３次元以上の半空間の解の表示を具体的に求めることで，全空間より減衰度のよい定常解の存在を証明することに成功した．２次元については解の表示を得ることはできているが期待できる定常解の減衰度が良くないため３次元以上と同様の議論で定常解の存在を証明することはできなかった．

定常解の安定性に関する研究は，外部領域を中心に今まで多くの研究があったが，半空間については研究がなされていなかった．本研究において今まで定常解に課していた仮定より領域の特徴を生かした仮定の下で，初期摂動が十分小さい場合に定常解の安定性を示すことに成功した．

(4) <u>２次元 aperture domain での定常解の安定性について</u>

得られている定常解が $L^2$ 空間に属さないことから外部領域と同じような手法で導くことはできない．しかし弱 $L^2$ 空間に属していることを用いて，定常解の漸近安定性を証明することができた．具体的には，安定性を議論するためには摂動 Navier-Stokes 方程式を考えるが，その摂動項と非線形項をすべて外力と考えて，逐次近似法を用いて安定性を示すのである．その際に，山崎昌男氏により得られた Stokes 半群の $L^p$-$L^q$ 評価や，弱 $L^2$ 空間での評価を用いて証明を行った．ここで特筆すべき点は，同じ方法で定常解だけでなく，時間周期解のような時間に依存する解の漸近安定性についても証明することができる点である．よく知られている方法では，定常解を含んだ半群を考えるため，時間に依存する解の安定性を示すことはできないが，ここで用いた方法は，必要な半群には定常解を含まないため，時間に依存する解の安定性を示すことができるのである．

５．主な発表論文等

（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計 ４ 件）


① <u>T. Kubo</u>,”The Stokes and Navier-Stokes equations in an aperture domain”，研究集会″流体と気体の数学解析″，数理解析研究所講究録

1592, (2008), 53-68. (査読無)

② T. Kubo, “The Stokes and Navier-Stokes equations in an aperture domain”, J. Math. Soc. Japan, Vol.59, No.3 (2007), 837-859. (査読有)

③ T.Kubo, “On the Stokes and Navier-Stokes equations in a perturbef half-space and an aperture domain”, Asymptotic Analysis and Singularities, Hyperbolic and dispersive PDEs and fluid mechanics, 47-1, Advanced Studies in Pure Mathematics, T. Kohno et al. ed. Tokyo Shoseki Printing Co. (2007), 169-187. (査読有)

④ T.Kubo and Y.Shibata, “$L^p$-$L^q$ estimate of the Stokes semigroup and its application to Navier-Stokes equation in a perturbed half-space”, Hyperbolic Problems, Theory, Numerics and Applications, II, Asakura et al. ed. Yokohama Publishers, (2006), 125-132. (査読有)

〔学会発表〕(計１４件)

① 久保隆徹：”Navier-Stokes flow in an aperture domain”, 研究集会「微分方程式の総合的研究」, 2008年12月20日, 京都大学

② 久保隆徹：”On Stokes and Navier-Stokes flow in an aperture domain”, 研究集会「曲線と曲面の非線形解析」, 2008年12月16日, 埼玉大学

③ 久保隆徹：”Stability of stationary Navier-Stokes flow in a two-dimensional aperture domain”, First China-Japan workshop on Mathematical Topics from Fluid Mechanics, 2008年11月12日, 北京大学(中国)

④ 久保隆徹：”Stability of stationary Navier-Stokes flow in a two-dimensional aperture domain”, Workshop on Mathematical Fluid Dynamics, 2008年9月7日, ダルムシュタット工科大学(ドイツ)

⑤ 久保隆徹：”Stability of stationary Navier-Stokes flow in a two-dimensional aperture domain”, The Banach Center Conference ″Parabolic and Navier-Stokes Equations 2008″, 2008年9月2日, Bedlevo(ポーランド)

⑥ 久保隆徹：「2次元 aperture domain での非圧縮粘性流の安定性」, 日本数学会年会 2008年3月25日, 近畿大学

⑦ 久保隆徹：「aperture domain における非圧縮粘性流について」, 東工大・早稲田ミニシンポジウム, 2008年1月12日, 早稲田大学

⑧ 久保隆徹：「aperture domain における非圧縮粘性流について」, 若手による流体力学の基礎方程式研究集会, 2008年1月5日, 名古屋大学

⑨ 久保隆徹：”Navier-Stokes flow in an aperture domain”, 第9回流体と気体の数学解析, 2007年7月12日, 京都大学数理解析研究所

⑩ 久保隆徹：”Navier-Stokes flow in an apretue domain”, 応用数学に関する愛媛ワークショップ, 2007年3月17日, 愛媛大学

⑪ 久保隆徹：”The Navier-Stokes flow in the aperture domain”, 第4回浜松偏微分方程式研究集会, 2006年12月10日, 静岡大学

⑫ 久保隆徹：”The Stokes and Navier-Stokes equations in the aperture domain”, The Banach Center Conference ″Parabolic and Navier-Stokes Equations″, 2006年9月14日, Bedlevo(ポーランド)

⑬ 久保隆徹：”The Stokes and Navier-Stokes equations in the aperture domain”, Evolution Equation 2006, 2006年8月31日, (Mons(Belgium) and Valenciennes(France)

⑭ 久保隆徹:”On the Navier-Stokes flows with a nontrivial flux conditon in an aperture domain”, 第28回若手発展方程式セミナー, 2006年8月9日, 六甲山

６．研究組織

(1)研究代表者

久保　隆徹　(KUBO TAKAYUKI)
筑波大学・大学院数理物質科学研究科・助教
研究者番号：90424811