

平成21年 4月13日現在

研究種目：若手研究（B）  
 研究期間：2006～2008  
 課題番号：18740085  
 研究課題名（和文） 極小力学系から生じる作用素環の分類と極小力学系の軌道同型について  
 研究課題名（英文） Classification of operator algebras arising from minimal dynamical systems and topological orbit equivalence of minimal dynamical systems  
 研究代表者  
 氏名（ローマ字）：松井 宏樹 （MATUI HIROKI）  
 所属機関・部局・職：千葉大学・大学院理学研究科・准教授  
 研究者番号：40345012

研究成果の概要：0次元の空間と言うべきコントロール集合上の、極小力学系について研究した。具体的には、有限生成アーベル群のコントロール集合への極小作用を、軌道同型で分類することに成功した。また、自由アーベル群の作用素環への作用を研究し、ある種のクラスの作用を分類することにも成功した。

## 交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,600,000	0	1,600,000
2007年度	1,000,000	0	1,000,000
2008年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総計	3,500,000	270,000	3,770,000

研究分野：作用素環論

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：作用素環・極小力学系・軌道同型・群作用

## 1. 研究開始当初の背景

接合積によって生じる作用素環の解析は、作用素環論が創始された当初から現在に至るまで、中心的な課題であり続けている。作用素環は von Neumann 環と  $C^*$ 環に大別される。可測空間の非可換化である von Neumann 環の場合には、Fields 賞を受賞した Connes による業績などによって、従順な群作用の分類やエルゴード論との密接な関わりなど、既に多くの重要な成果が得られている。しかし、位相空間の非可換化である  $C^*$ 環の場合には様々な技術的困難が発生し、包括的な研究を妨げている。作用する群を有限階数の自由アーベル群（以降  $Z^N$  と記す）

に限っても、知られていることは極めて少ない。

ひとつの重要な問題意識は、コンパクト距離空間への  $Z^N$  の極小作用を考え、そこから生じる接合積  $C^*$ 環を解析したり、元の力学系との関連を調べることである。 $Z$  の作用の場合には、Giordano-Putnam-Skau や Lin-Phillips によって、かなりの成果が既に得られている。しかし  $N$  が 2 以上の場合の  $Z^N$  作用に関しては、 $Z$  作用の場合の技術が通用しないため、研究が滞っている。

もうひとつの問題意識としては、非可換な  $C^*$ 環への  $Z^N$  作用を分類するという視点がある。この方面でも、 $Z$  作用に関しては岸本

晶孝や中村英樹などが重要な成果を得ている一方、 $N$  が 2 以上の場合の  $Z^N$  作用に関しては、ほとんど何も知られていない。

有限階数の自由アーベル群による作用は、 $Z$  作用の次に考察されるべき重要な研究対象のひとつであり、以上のような研究状況を打開する必要がある。

## 2. 研究の目的

有限生成アーベル群のカントール集合への極小作用を軌道同型で分類することが、ひとつの目標である。 $Z$  作用の場合には **Giordano-Putnam-Skau** による先行する結果があるが、これを  $Z^N$  に拡張する。

次に、カントール集合への  $Z^N$  の極小作用から生じる接合積  $C^*$ 環が、**tracial rank zero** であることを示すことにより、この環の構造を明らかにする。既にこの環が、**real rank zero · stable rank one** を持つことは分かっているが、もうひとつの状況証拠となる **AF 埋め込み可能性**はまだ示されていない。これを中間的な目標と考える。

## 3. 研究の方法

有限生成アーベル群のカントール集合への極小作用を軌道同型で分類するという問題に関しては、次のような戦略に基づいて研究を進める。まず、**Giordano-Putnam-Skau** の結果により、カントール集合上の **AF 同値関係**の軌道同型による分類は既に完成されている事に注目する。**AF 同値関係**に軌道同型となるような同値関係を **affable** と名付ける。有限生成アーベル群の極小作用から生じる同値関係の **affability** を示すことによって分類を達成する。そのためには、与えられた同値関係の中に「十分大きな」**AF 部分同値関係**を構成し、吸収定理を複数回適用すればよい。その際の問題点は大きく二つあると考えられる。ひとつは、都合の良い **AF 部分同値関係**を構成するために、 $N$  次元ユークリッド空間上のタイリング空間を考察しなければならない点である。ボロノイ分割の何らかの一般化あるいは修正が必要とされるだろう。もうひとつは、実際の適用に耐えられるような形の吸収定理を確立することである。 $N$  次元を扱うには、かなり緩やかな仮定のもとで、また複数回の適用を可能とするような設定で、定理を用意する必要がある。

次に、カントール集合への  $Z^N$  の極小作用から生じる接合積  $C^*$ 環を解析するという問題について述べる。前項で述べたように、接合積  $C^*$ 環が **tracial rank zero** を持つことを示すのが最終目標であるが、そのためにまず **AF 埋め込み性**を示すことによってその足掛かりとしたい。具体的な作戦としては、 $Z$  作用の場合の **Brown** のアイデアを高次元化することを考えている。**Brown** は、**Rohlin**

性を持つ  $Z$  作用を別に用意しておき、与えられた環にその作用をテンソルすることによって作用の特性を改善し、**Rohlin** 作用が持つ **stability** という性質を用いて **AF 埋め込み性**を示した。この議論を高次元化するには、当然のことながら、 $Z^N$  作用の **Rohlin** 性や **stability** を扱わなければならない。 $Z^N$  作用の **Rohlin** 性の定義は中村英樹によって既に与えられている。しかし、**Rohlin** 性からどのようにして **stability** を導けばよいのかが不明である。これは **von Neumann** 環の設定では現れなかった障壁であり、 $C^*$ 環に特有の問題である。これを解くには、何らかの幾何的な洞察に基づいて、問題をユニタリーのホモトピーの問題に帰着させる作戦が正しいように思われる。この辺りの議論を具体化・厳密化させるために、既に分類理論の範疇に捉えられているような扱いやすい環の設定で、最初の考察を進める。その上で、得られたデータをもとに、カントール集合から生じる接合積  $C^*$ 環の場合を研究する。

## 4. 研究成果

カントール集合への  $Z^N$  の極小作用を軌道同型で分類するというテーマについては、2005 年夏から、**Giordano-Putnam-Skau** との共同研究をスタートさせた。既に 2005 年度中に、 $Z^2$  の作用に関しては、タイリング空間の議論を経由して「十分大きな」**AF 同値関係**を構成するという部分は概ね完成していた。2006 年度に行ったことは大きく二つある。ひとつは、前年度に得られた **AF 同値関係**の構成に関する議論を精密化して、実際の証明に使える形に整理した。もうひとつは、証明の重要な道具である吸収定理を、必要とされるような設定で定式化し、証明を与えた。これらの成果は、

T. Giordano, H. Matui, I. F. Putnam and C. F. Skau,

The absorption theorem for affable equivalence relations,  
Ergodic Theory Dynam. Systems  
28 (2008), 1509–1531

および

T. Giordano, H. Matui, I. F. Putnam and C. F. Skau,

Orbit equivalence for Cantor minimal  $Z^2$ -systems,  
J. Amer. Math. Soc.  
21 (2008), 863–892

という 2 本の論文にまとめられた。1995 年に  $Z$  作用の軌道同型による分類がなされて以降、 $Z^N$  作用への拡張は長らくの懸案であったが、この成果はその壁を乗り越えたものであり、国内外の注目を得た。国内では、京都大学数理解析研究所や慶応大学で行われた研究集会・大阪市立大学で行われた日本数学

会秋季総合分科会において、この成果に関する研究発表を行った。国外では、ハワイ大学で行われた学会において、この成果や関連する話題について研究発表を行った。

翌 2007 年度には、 $Z^2$  作用に関して前年度までに得られた結果を、さらに  $Z^N$  作用にまで拡張する研究に着手した。「十分大きな」AF 部分同値関係を構成するという部分については、 $N$  次元ユークリッド空間のタイリングに関する議論が必要となるが、 $N$  が 3 以上の場合にはポロノイ分割を適切に修正するステップが複雑化してしまい、当初は解決の糸口が見えなかった。しかし、工学系の分野で重み付きのポロノイ分割がさかんに研究されているということが分かり、その分野を調査することにより、問題点を克服する重要なアイデアを得た。また、もうひとつの重要な鍵である吸収定理については、議論をさらに改善することにより、かなり緩やかな仮定のもとで成り立つことを示せた。これらの結果を組み合わせることによって、有限生成アーベル群のカントール集合への極小作用を軌道同型で分類するという問題に、完全な解答を与えることが出来た。吸収定理に関しては

H. Matui,

An absorption theorem for minimal AF equivalence relations on Cantor sets,  
J. Math. Soc. Japan  
60 (2008), 1171--1185

にまとめた。軌道同型による分類は

T. Giordano, H. Matui, I. F. Putnam and C. F. Skau,  
Orbit equivalence for Cantor minimal  $Z^d$ -systems,  
preprint

にまとめ、現在投稿中である。軌道同型による分類が完全解決されたことは、この分野における大きな成功として、国内外の研究者から注目された。2008 年 3 月に近畿大学で行われた日本数学会年会において特別講演の機会を頂き、この成果を報告した。

次に  $C^*$ 環に関する研究成果を述べる。カントール集合への極小作用から生じる接合積  $C^*$ 環を分類することを念頭に置いた上で、まずはその環の AF 埋め込み性について研究を進めていた。その過程で、 $Z^2$  作用の Rohlin 性から stability を導くための鍵となるアイデアを得た。これはユニタリーのホモトピーに関する議論と幾何的な考察を組み合わせたものであり、従来から未解決であった部分を解決する重要なステップである。このアイデアを昇華させることにより、UHF 環上の  $Z^2$  作用をコサイクル共役で分類することに成功した (勝良健史との共同研究)。さらに 2 個の元で生成される Cuntz 環上の  $Z^N$  作用がコサイクル共役を除いて 1 つし

かないという結果も得た。これらは、

T. Katsura and H. Matui,  
Classification of uniformly outer actions of  $Z^2$  on UHF algebras,  
Adv. Math.  
218 (2008), 940--968

および

H. Matui,  
Classification of outer actions of  $Z^N$  on  $O_2$ ,  
Adv. Math.  
217 (2008), 2872--2896

という論文にまとめられた。単純な  $C^*$ 環への  $Z^N$  作用の分類としては世界的に見ても最初の成果であり、この分野における大きな進展と見られている。前者の成果については 2007 年 11 月にトロントのフィールズ研究所で行われた学会において成果発表を行った。

2008 年度には前年度の結果をさらに拡張し、Kirchberg 環へのある種の  $Z^2$  作用をコサイクル共役で分類することに成功した。この成果は

M. Izumi and H. Matui,  
 $Z^2$ -actions on Kirchberg algebras,  
Preprint

にまとめられ、現在投稿中である。

## 5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計8件)

[1] H. Matui,  
An absorption theorem for minimal AF equivalence relations on Cantor sets,  
J. Math. Soc. Japan  
60 (2008), 1171--1185.  
査読有

[2] H. Matui,  
Classification of outer actions of  $Z^N$  on  $O_2$ ,  
Adv. Math.  
217 (2008), 2872--2896.  
査読有

[3] T. Katsura and H. Matui,  
Classification of uniformly outer actions of  $Z^2$  on UHF algebras,  
Adv. Math.  
218 (2008), 940--968.  
査読有

[4] T. Giordano, H. Matui, I. F. Putnam and C. F. Skau,  
The absorption theorem for affable equivalence relations,

Ergodic Theory Dynam. Systems  
28 (2008), 1509--1531.  
査読有

[5] T. Giordano, H. Matui, I. F. Putnam and  
C. F. Skau,  
Orbit equivalence for Cantor minimal  
 $Z^2$ -systems,  
J. Amer. Math. Soc.  
21 (2008), 863--892.  
査読有

[6] H. Matui,  
Torsion in coinvariants of certain Cantor  
minimal  $Z^2$ -systems,  
Trans. Amer. Math. Soc.  
360 (2008), 4913--4928.  
査読有

[7] H. Matui,  
A short proof of affability for certain  
Cantor minimal  $Z^2$ -systems,  
Canad. Math. Bull.  
50 (2007), 418--426.  
査読有

[8] H. Matui,  
Affability of equivalence relations  
arising from two-dimensional substitution  
tilings,  
Ergodic Theory Dynam. Systems  
26 (2006), 467--480.  
査読有

[学会発表] (計6件)

[1] 松井宏樹  
カントール極小系の軌道同型による分類  
2008年3月24日  
日本数学会年会特別講演  
近畿大学

[2] Hiroki Matui  
 $Z^2$ -actions on UHF algebras  
2007年11月16日  
Workshop on Structure of  $C^*$ -Algebras  
Fields Institute

[3] Hiroki Matui  
Cantor minimal  $Z^d$  systems and  
 $C^*$ -algebras  
2007年1月29日  
Operator Algebras and Related Fields  
(Combined Japan-US and West Coast  
Operator Algebra Seminar)  
ハワイ大学

[4] 松井宏樹

カントール極小  $Z^2$  系の軌道同型による分  
類について  
2007年1月23日  
タイリング—準周期性の数理  
慶応大学

[5] 松井宏樹  
カントール極小  $Z^2$  系の軌道同型による分  
類について  
2006年9月21日  
日本数学会秋季総合分科会一般講演  
大阪市立大学

[6] 松井宏樹  
カントール極小  $Z^2$  系の軌道同型による分  
類について  
2006年9月7日  
共同研究・作用素環論の発展  
京都大学数理解析研究所

[図書] (計0件)

[産業財産権]

○出願状況 (計0件)  
○取得状況 (計0件)

6. 研究組織

(1) 研究代表者

松井 宏樹 (MATUI HIROKI)

千葉大学・大学院理学研究科・准教授

研究者番号：40345012

(2) 研究分担者

なし

(3) 連携研究者

なし