

平成21年 4月30日現在

研究種目：若手研究(B)
 研究期間：2006～2008
 課題番号：18740089
 研究課題名（和文） 量子統計的視点からの幾何学的漸近解析の諸問題の研究
 研究課題名（英文） Problems in geometric asymptotic analysis
 from a viewpoint of quantum statistics.
 研究代表者
 楯 辰哉 (Tate Tatsuya)
 名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・准教授
 研究者番号：00317299

研究成果の概要：ボゾンガスの状態数の漸近挙動についての結果を得た。また、M. Stolz 氏との共同研究において、ランダム行列理論に現れるモーメント積分の、一般のコンパクト連結リ一群での類似物を考察し、テンソル積を表すパラメータについての漸近挙動に関する結果を得た。更に、S. Zelditch 氏の導入・考察した Delzant 凸多面体上の Bergman-Bernstein 測度に示唆され、一般の凸多面体上で Bernstein 測度を導入・考察した。その結果、漸近展開公式などの諸性質を明らかにし、さらに Bergman-Bernstein 測度との関連を明らかにした。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,300,000	0	1,300,000
2007年度	900,000	0	900,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
総計	3,200,000	300,000	3,500,000

研究分野：大域解析学

科研費の分科・細目：数学・大域解析学

キーワード：漸近展開、ボゾンガスの状態数、分割数、ランダム行列理論、モーメント積分、Bernstein 測度、凸多面体、トーリック多様体

1. 研究開始当初の背景

(1) ボゾンガスの状態数は分割数のスペクトル論的な類似物と考えられることが知られている。研究代表者は数年前 S. Zelditch 氏との共同研究において、格子上的道の個数の数え上げ関数の漸近挙動についての研究を行った。この研究に現れた数え上げ関数は、表現論では表現に現れるウェイトの重複度と考えることが出来る。そして既約な部分表現の重複度をウェイトの重複度で書き表わすことが出来る。Borel-Weil の定理を用いると、

この既約表現の重複度は物理的には多粒子系における状態数と考えることが出来ることが分かる。この S. Zelditch 氏との共同研究では楕円型作用素を用いての定式化はしていないが、この共同研究を作用素論的に書き直したものがボゾンガスの状態数である。この状態数の漸近挙動を、分割数の類似という観点から解析することが、この研究の背景である。

(2) ランダム行列理論においては、モーメント積分と呼ばれる行列積分が現れる。これは Diaconis らがユニタリ群に対して

計算したが、より一般の古典群についても Stolz 氏らによって計算されている。しかし一般のコンパクト・リー群上でモーメント積分の類似を考えると、一般には計算は難しい。難しさの原因の一つにテンソル積中の不変式の次元等の詳しい情報を書き下す方法が無いことがあげられる。そこでこの研究では、パラメータとして特にテンソル積の次数を選び、そのパラメータが増大するときのモーメント積分の漸近挙動を調べることを背景とした。

- (3) 研究開始当初、応募時には計画に無かった研究である。2007 年の Zelditch の Bergman-Bernstein 測度の導入と解析を受け、一般の凸多面体上での類似物を考察することを背景として Bernstein 測度についての研究を取り入れた。Zelditch が何故 Bergman-Bernstein 測度を導入したかは定かではないが彼は、一つの応用として Delzant 凸多面体上のリーマン和の漸近展開を Bergman-Bernstein 測度の漸近展開を積分する形で得ている。しかし彼は対応する滑らかなトーリック多様体上でのテププリッツ作用素の解析を用いているため、一般の凸多面体への拡張は難しい。そこで、研究代表者はテププリッツ作用素などの解析を用いず、より原始的な手法で一般の凸多面体上で Bernstein 多項式の類似物を構成し、それをリーマン和の漸近挙動に応用出来ないかと考えたのが、背景である。

2. 研究の目的

- (1) 当初既に最も状況の良い場合のボゾンガスの状態数の漸近挙動は得られていた。つまり整数の固有値を持つ楕円型作用素により生成される自由ボゾン粒子の多粒子系の状態数の挙動で、特に古典力学が 2π の共通周期を持ち、さらにそれより小さい周期を持つ周期軌道を持たない場合である。しかしこの仮定は強すぎ、実際には共通周期が 2π であっても、それより小さい周期を持つ周期軌道が存在する場合も起こりうる。また、固有値の整数性や古典力学の周期軌道に何も仮定をおかない場合、状態数自身の漸近挙動を解析することは難しいが、平均化した状態数については、分割数の漸近挙動においても様々な結果が知られていた。そこで本研究では、共通周期以外の周期を持つ周期軌道が存在する場合への漸近公式の拡張、並びに仮定をおかない場合の平均化した状態数の漸近挙動の解析を目的とした。
- (2) もともとモーメント積分はランダム行列理論において固有多項式のベキの期待値

の計算をする上で現れたものである。一般にランダム行列理論は、行列のサイズを大きくする極限を取るため、古典群の系列に対してのみ考察されてきた理論であるが、このモーメント積分の定量的な性質を古典群だけでなく一般のコンパクト・リー群上で行うことにより、ランダム行列理論の一般のコンパクト・リー群を用いた定式化への第一歩とすることが目的であった。しかし実際には一般のコンパクト・リー群では行列のサイズという概念自体が自然な形では存在しない。もともとのユニタリ群に対するモーメント積分についての Diaconis-Shashahani の結果を詳しく反省すると、モーメント積分には自然にテンソル積表現のパラメータが入っていて、それについての漸近挙動を調べる事が出来、さらにこのような観点でテンソル積中の不変式の次元の漸近挙動も解析出来ることに気付き、それを実際に遂行し、モーメント積分の構造を理解することを目的とした。

- (3) 古くから知られる Bernstein 多項式は、Weierstrass の多項式近似定理と呼ばれる定理を証明するために Bernstein によって導入された。その後、この Bernstein 多項式による一般の関数の近似は、単に一樣近似だけでなく、その微分をも近似していること、あるいは漸近展開なども調べられていて、たいへんよい近似となっている。また、この Bernstein 多項式の漸近展開式を積分することで閉区間上のリーマン和の漸近展開を得ることが出来る。Zelditch は Delzant 凸多面体上に、対応するトーリック多様体の Bergman 核を用いて Bernstein 多項式の類似物を構成し、その漸近展開を得ている。そしてそれを積分する形で、Delzant 格子凸多面体上のリーマン和の漸近展開を得た。しかし Delzant 凸多面体という強い条件が付いている。そこで、Bernstein 多項式の類似物を一般の凸多面体上で定義し、その漸近解析的な性質、並びに Zelditch の導入した Bergman-Bernstein 測度との関連を調べ、さらに凸多面体上のリーマン和の漸近挙動に応用することが目的であった。

3. 研究の方法

- (1) 分割数の漸近挙動については Hardy-Ramanujan の公式が有名であるが、Meinardus がその後より詳しい解析を行った。Meinardus が分割数の漸近公式を得るために用いた手法は、いわゆる鞍点法の類似である。鞍点法は積分の漸近挙動を調べる際の一般的な手法である。従ってボゾンガスの漸近挙動を調べる際、

状態数が適当な積分表示を持てば、Meinardus の手法が適用出来る。実際に上記「目的」欄に記載した仮定をおけば状態数はたいへん都合の良い積分表示を持ち、これに Meinardus の手法を用いて漸近挙動の性質を調べることが出来る。しかしこれには、複素化された熱核のある性質を用いることが必要である。その性質を Duistermaat-Guillemin による波動作用素のトレースの特異点公式を用いて解析した。また、一般の場合、平均を取った状態数の漸近挙動を考えるが、それに対しては Hardy-Ramanujan の Tauber 型定理を用いて解析した。

- (2) Zelditch 氏との数年前の共同研究における手法を踏襲する形で研究を行った。これも上記の Meinardus の手法と同様に停留位相法を系統的に使用する手法である。この研究においては対象が既に積分表示を持っているため、直接停留位相法が適用出来る状況にあった。しかしその解析には様々な表現論的な量が現れるため、それを精密に計算することが必要であった。特に、最終的に漸近展開の係数の計算が必要だが、それには Macdonald による積分公式を用いた。
- (3) 古典的な Bernstein 多項式の漸近展開について最近の Hormander の論文を読み、その手法を適用した。具体的には、Hormander の手法とは単にテーラー展開を系統的に使用するだけであるが、そこでは、ある行列値関数が重要な役割を果たす。この行列値関数を分散行列とする確率測度の族を逆に定義し、それを Bernstein 多項式の類似物であると考えて解析するという手法を用いた。またそのためには、トーリック多様体論で広く用いられる古典的な凸解析の諸結果を使用する必要があった。

4. 研究成果

- (1) 量子論で整数固有値をもち、対応する古典力学が周期的であり、さらに共通周期が 2π の場合、その他の周期軌道が小さな次元の多様体をなすという仮定のもとにボゾンガスの状態数自身の漸近挙動を記述することができた。結果は、第一項の係数に楕円型作用素のゼータ関数正規化された行列式が現れる。しかし対数をとったものの漸近挙動は、行列式などハミルトニアンに固有の情報に極限下には消失し、普遍的な量が現れることが分かった。また、一般に古典力学・量子力学の仮定の無いときは、状態数の平均を取ったものの漸近挙動、つまり Weyl 型の漸近公式を得ることが出来た。結果は論文にまとめてあり、現在投稿中である。また、本論文はアーカイブ

(math.FA/0702857v1) に投稿してある。しかし残念ながらボーズ・アインシュタイン凝縮の起こりうる状況は除外している。これの起こる状況での状態数の挙動は今後の課題である。

- (2) M. Stolz 氏との共同研究で、モーメント積分の一般のコンパクト・リー群上での類似物のテンソル積パラメータに関する漸近挙動を明らかにした。多少の条件は付いているものの、これに関しては望まれる形で結論を得た。またその応用としてテンソル積中の不変式の次元の漸近挙動を導くことが出来た。しかし、上述のように、この研究は実際にはこれだけが目的ではなく、一般のコンパクト・リー群を用いたランダム行列理論の再構築を目的としていた。この目的の達成にはまだ至っていない。今後の課題である。
- (3) 一般の凸多面体上で Bernstein 測度を、Hormander の手法を参考に導入し、その漸近解析的な性質をほぼ完全に得ることが出来た。また Donaldson の導入した balanced metric という概念を経由し Zelditch の導入した Bergman-Bernstein 測度との関連も明らかにすることが出来た。さらに Son-Zelditch は Bergman-Bernstein 測度の large deviation principle のレート関数に対する公式を得ているが、対応して我々の Bernstein 測度の large deviation principle のレート関数を具体的に書き下した。その結果、レート関数は Bergman-Bernstein 測度と Bernstein 測度では、全く同じものが現れることが分かった。しかし残念ながら Bernstein 測度を用いてリーマン和の漸近挙動を調べるのは、困難であることが分かった。これについては、Bernstein 測度ではなく、その非コンパクトでの類似物である Szasz 測度を導入し、現在それを利用してリーマン和の漸近挙動を調べている。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 3 件)

- ① T. Tate, Bernstein measures on convex polytopes, Contemporary Mathematics (査読有) vol 484, 2009, 295-319.
- ② 楢辰哉, 凸多面体上の Bernstein 測度と関連する話題, 数理解析研究所講究録 (査読無), 1613, 2008, 125-143.
- ③ M. Stolz and T. Tate, Asymptotics of matrix integrals and tensor invariants of compact Lie groups,

Proceedings of the American
Mathematical Society (査読有),
vol.136, 2008, 2235-2244.

[学会発表] (計 5 件)

- ① T.Tate, Bernstein measures on convex polytopes, The 1st MSJ-SI (The Mathematical Society of Japan, Seasonal Institute), 2008 年 7 月 29 日, 京都大学百周年時計台記念館国際交流ホール.
- ② 楯辰哉, Bernstein measures on convex polytopes, Bergman 核と代数幾何への応用, 2008 年 6 月 5 日, 京都大学数理解析研究所.
- ③ T.Tate, A spectral analogue of asymptotics of the number of partitions, Ireland-Japan Joint Workshop on Geometry and Dynamical Systems, 2006 年 12 月 18 日, 慶

應大学.

- ④ T.Tate, A spectral analogue of asymptotics of the number of partitions, 厳密統計力学と数学的場の量子論の現在, 2006 年 9 月 9 日, 九州大学西新プラザ.
- ⑤ T.Tate, A spectral analogue of asymptotics of the number of partitions, Workshop on Asymptotics in Geometry, 2006 年 7 月 16 日, 東北大学.

6. 研究組織

(1) 研究代表者

楯辰哉 (Tate Tatsuya)

名古屋大学・大学院多元数理科学研究科・
准教授

研究者番号 : 00317299