様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年４月１日現在

研究種目：若手研究（B）
研究期間：2006～2008
課題番号：18740090
研究課題名（和文）
パンルヴェ系の高次元への拡張と特殊解・対称性および可積分系との関連
研究課題名（英文）
A Generalization of the Painlev’e systems to higher dimension, their special solutions, symmetries and relations to integrables systems

研究代表者
増田　哲（MASUDA TETSU）
青山学院大学・理工学部・准教授
研究者番号：00335457

研究成果の概要：

離散パンルヴェ系と呼ばれる非線形力学系の特殊解を具体的に構成し，解として現れる函数がもつ対称性などの性質を，元の力学系の対称性から説明することに成功した．また，ある種の方程式については，解として何故そうした函数が現れるのかについて，ひとつの自然な理由を説明することができた．さらに，離散パンルヴェ系を高次元に拡張することを試み，非常に大きな対称性をもった高次元離散力学系の例を定式化することに成功した．

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	1,200,000	0	1,200,000
2007 年度	1,100,000	0	1,100,000
2008 年度	1,100,000	330,000	1,430,000
年度			
年度			
総　計	3,400,000	330,000	3,730,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：可積分系，特殊函数論

１．研究開始当初の背景

離散パンルヴェ方程式とは，ある種の「可積分な」２階非線形常差分方程式の総称であるが，近年の研究により，パンルヴェ微分方程式を含む，より基本的な力学系であることが認識され，特殊解の構成や無限次元可積分系との関係など，さまざまな観点から近年活発に研究されている．とりわけ，特殊解およびそのタウ函数の構成については，私と梶原，野海，太田，山田各氏との共同研究により，急速に進展しつつある．したがって，この方向での研究を引き続き押し進めることが課題のひとつであった．特に，E型のアフィンワイル群対称性をもつ離散パンルヴェ方程式について，背後にどのような無限次元可積分系が存在するのかを明らかにすることは，たいへん重要かつ興味深い課題となっている．私は以前，第５パンルヴェ方程式の有理解の構成を行い，それらが普遍指標を用いて表されることを明らかにしたが，この結果が後に，ＵＣ階層と呼ばれる新たな可積分系の

発見に結び付いた．この例にも見られるように，離散パンルヴェ方程式の特殊解についての研究を通じて，無限次元可積分系について重要な知見を加えることを，本研究では意図していた．

また，離散パンルヴェ方程式をワイル群対称性の観点から捉えることにより，それらを高次元（高階）へ拡張する幾つかの方法についての示唆が得られる．実際，梶原，野海，山田による $A_{m-1}^{(1)}\times A_{n-1}^{(1)}$型離散力学系などのような高階への一般化がすでに知られている．これとは別の高次元化の試みも可能であり，ワイル群（アフィンに限らぬ）対称性をもつ高次元離散力学系を定式化し，その特殊解について論じること，それらの背後に存在するべき無限次元可積分系についての知見を得ることも重要な課題であった．

一方，微分方程式に目を向けると，パンルヴェ方程式およびその高階への拡張であるガルニエ系を，ドリンフェルト-ソコロフ階層の相似簡約と捉えることができるが，その立場から，アフィンワイル群対称性をもつ高階パンルヴェ型微分方程式系を導出する研究が，急速に進展している．しかしながら，「十分大きな」無限次元可積分系から出発すれば大抵のパンルヴェ型微分方程式を得ることは可能である，ということもできる．それぞれの パンルヴェ型微分方程式の性質を最も反映した可積分系は何か，という問いに答えるためには，これらの特殊解についての研究を押し進めることが不可欠である．また，パンルヴェ微分方程式やガルニエ系は，（一般化）された反自己双対ヤン-ミルズ方程式という，佐藤理論の枠組には収まらない高次元可積分系からも導出されることが知られており，高階パンルヴェ系の特殊解の研究は，これら高次元可積分系に対する理解を深めるという観点からも，重要な課題であった．

２．研究の目的

本研究の目的は，（離散）パンルヴェ方程式およびそれらの一般化に対して，特殊解や対称性および背後にある無限次元可積分系についての具体的な知見を積み上げつつ，それらを踏まえて，可積分系理論の高次元化を試みること，およびその解空間の構造や対称性を明らかにすることであった．

３．研究の方法

離散パンルヴェ系の特殊解についての研究を系統的に推し進める一方で，以下の課題を中心に取り組んだ．

（１）離散パンルヴェ系の高階への拡張のひとつの試みを行った．
（２）パンルヴェ微分方程式と典型的な高次元可積分系のひとつである反自己双対ヤン-ミルズ方程式との関連についての研究を行った．
（３）高階パンルヴェ型微分方程式やガルニエ系（およびその離散類似）の無限次元可積分系との関係についての研究の進展状況を把握・分析した．

これらを遂行するうえで，野海正俊氏，山田泰彦氏，太田泰広氏（神戸大学），梶原健司氏（九州大学），筧三郎氏（立教大学），坂井秀隆氏（東京大学）をはじめ，国内の関連する研究者と，必要に応じて議論を行った．

可積分系研究の歴史を振り返ると，特殊解についての知見を積み上げることで背後にある代数的・幾何学的構造の解明に至る，という状況がしばしば起こっている．そうした経験を踏まえ，本研究では特殊解のタウ函数およびそれらが満たす双線形関係式に注目して議論を進めることを基本戦略とした．タウ函数とは可積分系理論において最も基本的な対象であり，ある可積分系を理解することは，そのタウ函数を理解することであるといっても過言ではない．徹底してタウ函数に着目するという点が，本研究のひとつの大きな特色であった．

研究方法におけるもうひとつの特色は，パンルヴェ系の背後に存在する（あるいは存在するべき）無限次元可積分系との関連を強く意識し，新たな可積分系の発見を意図している点である．これは，第５パンルヴェ方程式の有理解の構成がＵＣ階層という新たな無限次元可積分系の発見に結実したことが念頭にある．無意味な一般化を考えているのではなく，（離散）パンルヴェ系という具体的対象との関わりで，無限次元可積分系を捉えようとする点が重要である．

４．研究成果

研究の主な成果は，以下の通りである．

（１）q-差分パンルヴェ VI 方程式のタウ函数による定式化を行い，この方程式が q-UC 階層（q-KP 階層の一般化）の自己相似簡約として得られることを示した．その自然な帰結として，q-差分パンルヴェ VI 方程式のある代数解の族は，普遍指標多項式（の q-類似）を用いて表されることがわかる．

（２）射影空間内の一般の位置にある点配置の配置空間と，その上へのワイル群の双有理

作用を基礎にして，楕円差分パンルヴェ方程式を含むようなクレモナ変換の系についての高次元的な枠組みを提唱した．

（３）第３パンルヴェ方程式の超幾何型特殊函数解が，反自己双対ヤン-ミルズ方程式の行列式解の特殊化として得られることを示した．また，第３パンルヴェ方程式のアフィンワイル群対称性が，反自己双対ヤン-ミルズ方程式の対称性から復元できることを示した．

（４）$E_8^{(1)}$型 q-パンルヴェ系の超幾何型特殊函数解のタウ函数を完全に決定した．カゾラチ行列式表示において，その要素はラーマンの q-超幾何積分で与えられる．また，q-超幾何積分のベイリー変換やいわゆる「56 個の解」についても，元のパンルヴェ系のワイル群対称性から説明される．

（５）$E_7^{(1)}$型パンルヴェ系の超幾何型特殊函数解のタウ函数を完全に決定した．カゾラチ行列式表示において，その要素は q-超幾何函数 ${}_8W_7$で与えられる．また，超幾何函数 ${}_8W_7$の変換公式やいわゆる「12 個の解」についても，元のパンルヴェ系のワイル群対称性から説明される．

離散パンルヴェ系の特殊解，とりわけそれらのタウ函数を構成することは，本研究の重要な課題のひとつであった．それに取り組んだのが，（１）（４）（５）である．特に，（４）（５）については，Ｅ型対称性をもつ離散パンルヴェ系の超幾何解のタウ函数を完全に決定したものであり，２階のパンルヴェ系に話を限れば，特殊解の構成という立場からの結果として決定的なものといえる．また，線形差分方程式の解である q-超幾何函数の変換公式や（対ごとに）線形独立な解の集合などについて，非線形力学系の視点から，群論的説明を与えたという点で画期的な結果といえよう．これらの結果は，今後，可解格子模型などへの応用が期待される．

研究の背景にも述べたように，離散パンルヴェ方程式をワイル群対称性の観点から捉えることにより，高次元（高階）へ拡張することは重要な課題である．そのひとつの試みが（２）の結果であり，これは同時にアフィンに限らないワイル群対称性をもった離散力学系の例を与えており，一般には非可積分な例も含んでいる．今後，これらの特殊解や背後に存在するべき無限次元可積分系についての知見を得ること，可積分系研究の手法を用いた非可積分系の研究の可能性など，新たな課題を提起したといえる．

また，パンルヴェ系の特殊解の研究を通じて反自己双対ヤン-ミルズ方程式などの高次元可積分系に対する理解を深めるという課題に対して，（３）の結果はひとつの端緒を切り開いたといえよう．

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計４件）

１．Tetsu Masuda, Hypergeometric τ-functions of the q-Painlev'e system of type $E_7^{(1)}$, Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications Vol.5, Paper 035, 30 pp., 2009. 査読有り

２．Tetsu Masuda, The anti-self-dual Yang-Mills equation and the Painlev'e III equation, Journal of Physics A : Mathematical and Theoretical Vol.40, No.48, 14433-14445, 2007. 査読有り

３．Kenji Kajiwara, Tetsu Masuda, Masatoshi Noumi, Yasuhiro Ohta and Yasuhiko Yamada, Point configurations, Cremona transformations and the elliptic difference Painlev'e equation, S'eminaires et Congr`es Vol.14, 175--204, 2006. 査読有り

４．Teruhisa Tsuda and Tetsu Masuda, q-Painlev'e VI equation arising from q-UC hierarchy, Communications in Mathematical Physics, Vol.262, No.3, 595--609, 2006. 査読有り

〔学会発表〕（計８件）

１．増田 哲, q-Painlev'e 系の超幾何タウ函数, 日本数学会・無限可積分系セッション, 2008 年 9 月 24 日, 東京工業大学

２．増田 哲, $E_8^{(1)}$型 q-Painlev'e 系の超幾何タウ函数，研究集会「ソリトンの数理とその応用：非線形波動から可積分系へ」，2007 年 12 月 23 日，湯田簡易保険保養センター

３．増田 哲, $E_8^{(1)}$型 q-Painlev'e 系の超幾何タウ函数，研究集会「非線形波動研究の歩みと展望」，2007 年 11 月 7 日，九州大学応用力学研究所

４．増田 哲，パンルヴェ系の代数解に付随する特殊多項式，応用数理学会・応用可積分系研究部会オーガナイズドセッション，2007年9月15日，北海道大学

５．増田 哲，Painlev'e V 方程式の超幾何解と反自己双対 Yang-Mills 方程式，研究集会「可積分系数理の新潮流」，2007年8月21日，数理解析研究所

６．Tetsu Masuda, Tau functions of the hypergeometric solutions to the q-difference Painlev'e system of type $E_7^{(1)}$, The 7th International Conference on Symmetries and Integrability of Difference Equations, 2006月7月13日, The University of Melbourne, Melbourne

７．Tetsu Masuda, The anti-self-dual Yang-Mills equation and the third Painlev'e equation, Algebraic, Analytic and Geometric Aspects of Complex Differential Equations and their Deformations. Painlev'e Hierarchies. , 2006年5月19日, RIMS, Kyoto University

８．増田 哲，Ernst 方程式，Painlev'e 方程式，特殊函数，研究集会「ソリトン・特殊関数・変換理論」，2006年5月13日，国民宿舎つづらお荘

６．研究組織
(1)研究代表者
増田　哲（MASUDA TETSU）
青山学院大学・理工学部・准教授
研究者番号：00335457

(2)研究分担者

(3)連携研究者