

平成 21 年 5 月 25 日現在

研究種目：若手研究（B）

研究期間：2006～2008

課題番号：18740091

研究課題名（和文）体積保存系としての K3 曲面上の複素力学系

研究課題名（英文）Complex dynamics on K3 surfaces as conservative systems

研究代表者：

石井 豊（ISHII YUTAKA）

九州大学・数理学研究院・准教授

研究者番号：20304727

研究成果の概要：

K3 曲面上の正則自己同型がなす複素力学系およびそれに関連した課題について、体積保存力学系の立場から研究を行った。まず K3 曲面上の複素力学系については、Mazur の (2,2,2)-type の K3 曲面の実部であってその上の力学系が可積分に見える（2 点をのぞいて不変な円周で曲面が埋め尽くされる）を発見していたが、この例の場合、代数的な第一積分は存在しないことを Serge Cantat 氏とともに証明した。また、特に体積保存系特有の現象として KAM circle の崩壊の順序構造や自己相似性の問題が古くから物理学者によって取り上げられていたが、それらの現象と複素力学系の不変集合であるジュリア集合との関係を論じ、いくつかの予想をたてた。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合計
2006 年度	1,100,000	0	1,100,000
2007 年度	800,000	0	800,000
2008 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総計	2,700,000	240,000	2,940,000

研究分野：数学

科研費の分科・細目：大域解析学

キーワード：K3 曲面、複素力学系、ジュリア集合、KAM 不変円、体積保存系、自己相似性、エノン写像、エントロピー

## 1. 研究開始当初の背景

体積保存系は、様々な物理系のハミルトン流のポアンカレ断面として得られる写像を典型例として持ち、力学系の中でもとりわけ重要なクラスとなっている。またこの体積保存系は、散逸的力学系とは全く異なる現象、そして特有の解析の困難さを示すことが広く知られている。保存系に特有な現象の一例として、いわゆる KAM 不変円の存在が古くから知られていたが、その発生や崩壊の機構などについては未知な部分が多かった。

## 2. 研究の目的

保存系に特有な現象である KAM 不変円の上の力学系は「準周期的」になる。その一方、写像のパラメータによっては体積要素に絶対連続な不変測度が存在する場合もあり、このときの力学系は「エルゴード的」になる。KAM 不変円が豊富に存在する力学系からパラメータを変化させると、その回転数に応じて不変円は徐々に消滅していき、ついには最後の不変円 (last KAM circle) が崩壊する瞬間が訪れる。このように「準周期性」と「エルゴード性」という全くの対極にある 2 つの状態同士の遷移が系のパラメータを変化させたときにどのように起こるのかを調べることは、体積保存系の力学系研究の中心的課題のひとつとされている。本研究の目標は、この遷移のメカニズムを K3 曲面上の複素力学系の場合に明らかにすることである。

## 3. 研究の方法

K3 曲面上には任意の正則自己同型で不変ないたるところゼロでない正則 2 形式が存在するので、その正則自己同型の力学系はいわば「体積保存系」と「複素力学系」の交差点に位置すると考えられる。K3 曲面やその正則自己同型の解析に対しては代数幾何や解析幾何などの非常に強力な手法がすでに存在するため、これらを武器に力学系としての研究を推し進める。

## 4. 研究成果

まず K3 曲面上の複素力学系については、Mazur の (2,2,2)-type の K3 曲面の実部であってその上の力学系が可積分に見える (2 点をのぞいて不変な円周で曲面が埋め尽くされる) を発見していたが、この例の場合、代数的な第一積分は存在しないことを Serge Cantat 氏とともに証明した。また、特に体積保存系特有の現象として KAM circle の崩壊の順序構造や自己相似性の問題が古くから物理学者によって取り上げられていたが、それらの現象と複素力学系の不変集合であるジュリア集合との関係を論じた。この他にも、数学的な証明はできなかったが、K3 曲面の実部で起こる様々な興味深い現象を数値計算で確認した。

一方、K3 曲面上の複素力学系に関連して、同じ複素 2 次元力学系であるエノン写像に対して、コンビナトリアルな観点からの研究を行った。まず、今までジュリア集合の上で一様双曲的になるエノン写像は 1 次元系の小さな摂動しか知られていなかったが、今回、いかなる 1 次元系の摂動としても得られない双曲的エノン写像の例に初めて成功した。この結果は、論文

Yutaka Ishii:

“Hyperbolic polynomial diffeomorphisms of  $\mathbb{C}^2$ . I: A non-planar map”

Advances in Mathematics 218, pp.417-464 (2008)

にまとめられている。その証明には、ポアンカレ計量などの複素解析的手法、fusion と名付けたコンビナトリアルな新しいクラスの力学系の構成法、そして丸め誤差も含めて評価する精度保証計算による計算機援用証明などを用いた。

また、この例を含むあるクラスの双曲的写像に対して Hubbard tree と呼ばれるコンビナトリアルな数学的対象を定義し、その軌道空間がジュリア集合の位相的モデルを与える

ということを証明した。これらの構成や結果は

Yutaka Ishii:  
“Hyperbolic polynomial diffeomorphisms of  $C^2$ . II: Hubbard trees”  
Advances in Mathematics 220,  
pp.985-1022 (2009)

にまとめられた。この証明には、Cornell 大学の John Smillie 氏と共同で開発した双曲力学系に対する homotopy shadowing という手法

Yutaka Ishii and John Smillie:  
“Homotopy shadowing”  
To appear in Amer. J. Math. (2009)

が本質的に用いられる。

5 . 主な発表論文等  
(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文](計4件)

YUTAKA ISHII and Duncan Sands:  
“Lap number entropy formula for piecewise affine and projective maps in several dimensions”  
Nonlinearity  
Vol 20, pp.2755-2772 (2007)  
査読あり

YUTAKA ISHII:  
“Hyperbolic polynomial diffeomorphisms of  $C^2$ . I: A non-planar map”  
Advances in Mathematics  
Vol 218, pp.417-464 (2008)  
査読あり

YUTAKA ISHII:  
“Hyperbolic polynomial diffeomorphisms of  $C^2$ . II: Hubbard trees”  
Advances in Mathematics  
Vol 220, pp.985-1022 (2009)  
査読あり

YUTAKA ISHII and John Smillie:  
“Homotopy shadowing”  
To appear in Amer. J. Math. (2009)

[学会発表](計5件)

YUTAKA ISHII:  
“Hubbard trees for complex Henon maps”  
Workshop dedicated for the 60<sup>th</sup> birthday of John Hubbard,  
CIRM at Luminy, France  
June 2006.

YUTAKA ISHII:  
“Dynamics of hyperbolic complex Henon maps”  
Seminar on complex analysis in several complex variable,  
Kumamoto University, Japan  
February 2007.

YUTAKA ISHII:  
“Hubbard trees for complex Henon maps”  
Workshop on dynamical systems and foliations,  
University of Tokyo, Japan  
February 2007

YUTAKA ISHII:  
“Hubbard trees for complex Henon maps”  
Seminar on Teichmuller spaces,  
Universite de Provence, France  
April 2007.

YUTAKA ISHII:  
“Hubbard trees for complex Henon maps”  
Birational geometry and complex dynamical systems,  
Nagoya University, Japan  
August 2007

6 . 研究組織

(1)研究代表者

石井 豊 (ISHII YUTAKA)  
九州大学・数理学研究院・准教授  
研究者番号：20304727

(2)研究分担者

( )

研究者番号：

(3)連携研究者

( )

研究者番号：