様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成２１年　３月３１日現在

研究種目：若手研究（Ｂ）
研究期間：2006～2008
課題番号：１８７４００９５
研究課題名（和文）　強い非線形性を拡散項に持つ偏微分方程式系の可解性とその応用

研究課題名（英文）　Partial differential equations of nonlinear diffusion in thermohydraulics and their applications

研究代表者
深尾　武史（FUKAO TAKESHI）
岐阜工業高等専門学校・一般科目（自然）・講師
研究者番号：００３９０４６９

研究成果の概要：　熱水力学に現れる放物型偏微分方程式の連立系に対する可解性に関する結果を得た。ナヴィエ・ストークス方程式と連立した非線形熱方程式として、第一に相転移現象を記述する様な拡散項に強い非線形性を持つある熱方程式との連立系に対して、３次元の場合に弱解の存在とそのための与えられた初期関数等の必要条件を得た。第二に、制約条件が非線形性として主要項にある熱方程式との連立系に対して、２次元の場合に弱解の存在と一意性、解の連続依存性の結果を得た。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	1,600,000	0	1,600,000
2007 年度	800,000	0	800,000
2008 年度	700,000	210,000	910,000
年度			
年度			
総　計	3,100,000	210,000	3,310,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：非線形現象、発展方程式、熱水力学、

１．研究開始当初の背景

様々な自然現象は事象が数値化されていれば物理学の法則から微分方程式の問題として記述することができる。特に相転移現象と呼ばれる現象など、熱水力学に現れる非線形な現象は放物型の非線形偏微分方程式の初期値境界値問題で記述することができる。その微分方程式を解くことは現象解明の一つの手段として重要な意味を持つ。相転移現象などを記述する非線形熱方程式は複雑で長年数学で研究されてきた線形の熱方程式からかなりかけ離れている場合もある。さらに流体の運動をナヴィエ・ストークス方程式で記述する場合、その解の滑らかさの問題から、移流項を含む非線形熱方程式はそもそも解が存在するかどうかの問題、いわゆる可解性の問題も自明ではない。例えば、フェイズフィールド方程式と呼ばれる熱方程式系では幾つかのタイプの方程式に対して可解性の研究がなされているが、ナヴィエ・ストークス方程式との連立系に対しては初期型の方程式の場合のみ連立系に対する可解性の結果が得られている。

数学的には微分を関数空間の作用素として扱い、その微分方程式を抽象化することで、無限次元の関数空間上における常微分方程式といえる発展方程式の初期値問題として

捉えることができる。抽象化された発展方程式の可解性をはじめ、様々な性質を研究することで偏微分方程式を包括的に解くことができる。

フェイズフィールド方程式は相転移現象を記述する方程式の一つで、未知関数は温度と相関数と呼ばれる二つの変数であり、連立微分方程式になる。このフェイズフィールド方程式の研究は可解性をはじめ様々な研究が古くからなされており、さらにその方程式の形を変えた様々な新しいタイプの方程式が現象に応じて提唱されてきた。近年は流体の運動を記述するナヴィエ・ストークス方程式との連立系も可解性の研究が行われている。

固体液体間の相転移現象は、多くの場合、温度を変数として、ある相転移温度を境に相の状況が劇的に変化する現象である。その境界が未知関数によって決定されるため、自由境界問題となる。この種の自由境界問題に対して、非線形熱方程式とナヴィエ・ストークス方程式とを連立させた問題は、その複雑さから可解性の議論を含め各種研究は近年も盛んに行われている。

２．研究の目的

フェイズフィール方程式のなかで、非線形性の強いペンローズ・ファイフ型と呼ばれるものがある。絶対温度と相関数を未知関数に持つ連立の放物型偏微分方程式で、互いの拡散項に強い非線形性を持ち、線形の熱方程式の解法のように古典的な手法は応用できない。その弱解の存在の証明には関数解析的な手法である非線形発展方程式の抽象理論が応用できることがよく知られている。このペンローズ・ファイフ型に対してナヴィエ・ストークス方程式との連立した問題の可解性を証明することが第一の目標である。また、液体領域が温度や相関数などの未知関数によって決定される自由境界問題の可解性を証明することが第二の目標である。これまで研究が盛んに行われてきたステファン問題と呼ばれる相転移現象を記述する代表的な非線形熱方程式とナヴィエ・ストークス方程式の連立系に対する可解性については少しずつ研究が進められている。先行研究のステファン問題を含むような抽象的な非線形発展方程式の可解性の理論を応用し、ナヴィエ・ストークス方程式の連立系としての自由境界問題の可解性を考える。

３．研究の方法

拡散項に強い非線形性を持つ放物型の偏微分方程式を取り扱う必要があるため、関数解析的な手法である非線形発展方程式の抽象理論を応用し、まずは弱解のクラスで解を考える。拡散項に非線形を持つ場合、すでに非線形発展方程式の抽象理論が応用できる場合が数多く報告されており、ナヴィエ・ストークス方程式との連立系の場合にもそれらの解法が本質的には応用できると考えられる。ただし、方程式が連立系であるため、これまでに用いられてきた手法で、方程式に移流項を含む場合に、流速の滑らかさがどのくらい必要になるかが、結果を得る際に重要な点になる。

(1)　ペンローズ・ファイフ型に現れる強い非線形性の拡散項に注目し、まずはその拡散項を主要項に持つ移流項を含む熱方程式とナヴィエ・ストークス方程式の連立系を取り上げる。ディリクレ境界条件下の先行研究を応用し、ポアンカレの不等式の一般化を利用してノイマン境界条件下での解の存在に関する結果を３次元の場合に得る。

(2)　自由境界問題として、まずは温度制御装置を記述するような障害物問題として移流項を含む熱方程式を取り上げる。最大温度最小温度を制御するような温度制御装置を想定した問題は変分不等式で記述できることが分かっている。この変分不等式は温度に依存して熱方程式の表現が、等式の場合と不等式の場合に分かれる問題であり、それらの領域は未知関数に依存するため自由境界問題となる。この場合、拡散項は熱方程式と同じく線形になるが、発展方程式で記述した場合には時間依存を含む制約条件が、強い非線形性として主要項に含まれる。すでに発展方程式の抽象理論が応用できることが知られており、この問題に対して全体領域でナヴィエ・ストークス方程式を考え、その連立系を自由境界問題へのアプローチの第一歩として取り扱う。十分な解の評価を得るために、空間次元は２次元の場合を取り扱う。

４．研究成果

二つの問題に対して、それぞれ可解性に関連する以下の結果が得られた。

(1)　ペンローズ・ファイフ型を含むような退化放物型の偏微分方程式を考えた。この移流項を含む熱方程式と全体領域で考えるナヴィエ・ストークス方程式の連立系に対して、３次元の場合に、温度に対してノイマン境界条件、流速に対してディリクレ境界条件を課し、その弱解の存在定理を得た。連立の問題をそれぞれ個々に考え、与えられた関数に対してそれぞれの近似問題を解き、近似問題においては一意性が得られるため、先に不動点定理を用いて近似された連立の解を構成した。その極限として連立の解の構成を行った。

空間次元が３次元であるため一意性の結果は期待できない。また、ノイマン境界条件の場合には特有の保存量を持つため、解が存在のため条件として与えられた関数が満たすべき必要条件を得た。近似問題の段階で十分な評価式を得ておく必要があるが、ノイマン境界条件からくる問題点を解決するため、一般化されたポアンカレの不等式によってその点を処理した。なお、ペンローズ・ファイフ型のフェイズフィールド方程式は、ここで取り扱った非線形熱方程式に相関数の方程式を連立させたものである。今回の結果はその問題を考える足がかりとなると期待される。

(2)　障害物問題を発展変分不等式の形で表示し、発展変分不等式に対して過去に得られている抽象理論を応用して、ナヴィエ・ストークス方程式の連立系に対する解の存在と一意性、初期値に対する連続依存性の結果を得た。十分な解の評価を得るために、空間次元は２次元の場合を取り扱った。

①　温度の制約が上下両側の場合には温度の最大値の評価をその制約から得ることができる。拡散項が線形であるので熱方程式に対しては弱解だけでなく強解の滑らかさまで一様評価を得ることができた。また、解の一意性や連続依存性も過去の結果を応用して得ることができた。与えられた関数に対してそれぞれの近似問題を解き、不動点定理を用いて連立の解を構成した。

②　温度の制約が片側の場合には解の最大値の評価は自明でないため、その評価を得る必要がある。近似問題から移流項に依存しない最大値の評価を得ることで、①の場合に帰着し、結果を得ることができた。最大値の評価を近似問題の段階で得ておき、それを利用するため、①で行った極限移行の手順とは異なる手順を取る必要がある。

①と②のいずれの場合にも障害物問題として単独の問題は指示関数の劣微分を含む発展方程式の抽象理論が適応できることが知られている。今後の課題として、解の滑らかさについて、温度と流速の両方に対して平滑化効果の評価まで得られることが期待できる。これらの結果を利用し、連立の問題に対しても自励系・非自励系に対する大域的アトラクターの存在が証明できると期待できる。一方で(2)の結果は自由境界問題としては十分であるとは言えない。熱水力学に現れる自由境界問題として、ナヴィエ・ストークス方程式を考える領域は温度や相関数など未知関数によって決定されるべきである。しかし、(2)の結果から、その解法には発展方程式の抽象理論が応用できることが期待できる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計３件）

①　T. Fukao and M. Kubo,
Time-dependent double obstacle problem in thermohydraulics, GAKUTO Internat. Ser. Math. Appl. Vol. 29, (2008), 73--92,
査読有

②　T. Fukao,
Free boundary problems of the nonlinear heat equations coupled with the Navier-Stokes equations, Recent Advances in Nonlinear Analysis, (2008), 67--76,
査読有

③　T. Fukao and M. Kubo,
Nonlinear degenerate parabolic equations for a thermohydraulic model,
Discrete Contin. Dyn. Syst. Supplement 2007 (2007), 399--408,
査読有

〔学会発表〕（計１０件）

①　深尾武史−久保雅弘、
熱水力学に現れる障害物問題の弱解と漸近挙動について、第３４回発展方程式研究会、2008 年 12 月、中央大学

②　深尾武史−久保雅弘、
熱水力学に現れる障害物問題について、第３０回発展方程式若手セミナー、2008 年 9 月，山梨県笛吹市

③　T. Fukao and M. Kubo,
Time dependent obstacle problems in thermohydraulics, AIMS' 7th International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2008/ 5, Texas, USA

④　深尾武史−久保雅弘、
移流項を含むある発展変分不等式の解の存在について、第３回非線形数理科学、2007 年 12 月，千葉大学

⑤　深尾武史、
Abstract approach to the phase field equations with convection，日本数学会 2007 年度年会、2007 年 3 月、埼玉大学

⑥ 深尾武史、
ガレルキン法によるあるシステムの解の存在について、第２回非線形数理科学、2006 年 12 月， 千葉大学

⑦ T. Fukao,
Free boundary problem for phase field equations and Navier-Stokes equations without the Carman-Kozeny penalty, International Conference on Nonlinear Analysis, 2006/ 11, Hsinchu, Taiwan

⑧ 深尾武史、
Free boundary problem for phase field equations without the penalization term of Carman-Kozeny type, 日本数学会 2006 年度秋季総合分科会、2006 年 9 月、大阪市立大学

⑨ 深尾武史、
Carman-Kozeny 処罰項がない Navier-Stokes 方程式とフェイズフィールド方程式の自由境界問題について、第３２回発展方程式研究会、2006 年 9 月、中央大学

⑩ T. Fukao and M. Kubo,
Nonlinear degenerate parabolic equations for a thermohydraulics model, AIMS' 6th International Conference on Dynamical Systems, Differential Equations and Applications, 2006/ 5, Poirtiers, France

６．研究組織
(1)研究代表者

深尾　武史（FUKAO TAKESHI）
岐阜工業高等専門学校・一般科目（自然）・講師
研究者番号：００３９０４６９