様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　21 年　 6 月　10 日現在

研究種目：若手研究（B）
研究期間：2006～2008
課題番号：１８７４００９６
研究課題名（和文）非線形波動方程式系の初期値の性質が解に及ぼす影響

研究課題名（英文）The effect of the initial data on the systems of semilinear wave equations

研究代表者
黒川　友紀（KUROKAWA YUKI）
米子工業高等専門学校・一般科目・講師
研究者番号：５０３７５３７５

研究成果の概要：非線形波動方程式系の解析は，それぞれの未知関数の初期値に同等な関数を与えて解析するのが一般的であった。本研究では，それぞれに異なる性質の初期値を与えて解を解析し，系の性質を詳細に調べることを目的としていた。その結果，初期値を同等なものとした時には得られない新たな系の性質が明らかになった。特に，初期値のその違いがわずかなものであったとしても，解に与える影響は大きいことがわかった。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	800,000	0	800,000
2007 年度	1,000,000	0	1,000,000
2008 年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総　計	2,800,000	300,000	3,100,000

研究分野：数物系科学
科研費の分科・細目：数学・大域解析学
キーワード：非線形，波動方程式，系，初期値問題

１．研究開始当初の背景

非線形波動方程式論の研究は，数理物理に現れる具体的な方程式より，一般にモデル化した方程式の解析が中心となっている。特に、未知関数の冪を摂動項として持つ方程式は基礎的であると同時に，非線形波動方程式の性質を解明するために最も重要であるといってよい。この初期値問題の小さな解に関しては多くのことが調べられている。

例えば，初期値関数として，十分小さく滑らかで台がコンパクトである関数を与えると，時間大域解の存在・非存在の状況は非線形性の強弱によって分かれる，すなわち，非線形の指数にその臨界値が現れることが知られている。一方，初期値関数の台が非コンパクトで，遠方で多項式減衰をしている場合は，コンパクト台の場合に解の時間大域的存在が保証されていたような非線形性に対しても，解が爆発する場合があることが知られている。この時,解の存在･非存在を分ける臨界値は，初期値関数の減衰の度合いに現れている。

この２つのケースの設定の違いは，初期値関数の台がコンパクトであるか，そうでないかに尽きる。しかし，この結果の違いは大きく，重要である。また，それぞれの臨界値が，実は全く異なる情報に起因して定まることも

興味深い。つまり，コンパクト台の場合に現れる臨界指数は，解の減衰オーダーに関連するため，空間次元のみに依存して決まる。しかし，非コンパクト台のケースに現れる臨界減衰は，方程式のスケール変換に関する量のみによって決まるため，非線形性，つまり方程式の形によって定まる量であり，これに空間次元は一切関係していないのである。

このような単独方程式に関する詳細な解析が進む中，小さな解の解析は対応する系についても研究が進められてきている。その結果，系の相互作用がもたらす系特有の現象や，系ではあっても単独方程式と同様な現象などが解明されつつある状況である。

ところで，これらの従来の系に関する研究では，全ての未知関数に対して初期値に同等な仮定を与えて解析するのが一般的であった。これは系の構造を調べる上では有効な設定であったが，複雑系を考える上では，必ずしも全ての初期値が同じクラスの関数とは限らないため，更にそれぞれの成分に異なる設定を与えた系の解析が必要である。しかも，先述の単独方程式の結果により，初期値の設定の違いは結果に重大な違い生み出すことが知られていることを考慮すると，異なる初期値を与えた系は，従来の系とは異なる特有の性質を持つ可能性があり，これは系の解析においては重要な問題である。しかし，申請時においては，H. Takamuraにより大きさの異なる初期値を与えた系の解析がなされた他，これらはあまり解明されていない状況であった。

２．研究の目的

このような背景を踏まえて，本研究では，非線形波動方程式系の初期値にそれぞれ異なる仮定を与えて解析し，この系の初期値問題の解の性質を解明することを目的としている。

具体的には，そのような初期値問題の解の存在・非存在を決定する条件が何に依存して決まるのかを明らかにし，それがどちらの初期値の性質が強く影響して決定されるのか，それとも，一方ではなく双方が影響しあって決定されるのかを解明する。このとき，初期値の性質のみならず，系の相互作用の影響も重要な鍵となることに注意し，詳細な解析を行う。

そのため，系の解の減衰評価や，３次元空間におけるホイヘンスの原理との関係，解のライフスパン等を調べるなど，多角的に解析を行う。

また，既存研究において解析されてきた同様な性質を持つ初期値を与えた初期値問題の解の性質と比較し，本研究において解析する初期値問題の解の性質の特徴を明らかにする必要もある。

これらの解析を行う本研究により，非線形波動方程式系の一般論に新たな枠組を与えることを目的とする。

３．研究の方法

系の成分数が２の場合を調べれば，構造を把握するのに十分であると思われるので，未知関数をu, v とした半線形波動方程式系を解析する。まずは簡単のため，空間次元は３次元とする。非線形性は，u, v の相互作用の強いstrongly coupled systems と呼ばれる

$$\begin{cases} \Box u = |u|^{\alpha}|v|^{\beta} \\ \Box v = |u|^{\gamma}|v|^{\delta} \end{cases}$$

と，相互作用の弱いweakly coupled systems と呼ばれる

$$\begin{cases} \Box u = |v|^{p} \\ \Box v = |u|^{q} \end{cases}$$

との２種類を候補とする。

初期値は共に十分小さいとし，さらに以下の２種類の設定を考える。

(1) 初期値の仮定が少しだけ異なる場合
具体的には，u, v ともに初期値関数は台が非コンパクトで，遠方では多項式オーダーで減衰しているものとするが，その減衰オーダーが異なる場合。

(2) 初期値の仮定が大きく異なる場合
具体的には，一方の初期値関数の台はコンパクト，もう一方の台は非コンパクトである場合。

まずは(1)を解析し，それぞれの初期値に異なる設定を与えることで，それが系の相互作用と相まって解の挙動に影響を与えるかどうかを詳細に調べる。次にその結果を参考にし，(2)の解析を行う。

解析の方法は，いずれの場合も解の積分表示を用いることをベースとする。これは初期値の台がコンパクトでも非コンパクトでも適用可能であり，さらにはその性質を直接的に反映させることができるため，それらを複合した本研究では特に有効な方法であると期待できる。このような積分表示の解析をベースとし，おもに

①古典解が存在すると仮定し，それが爆発するための条件を調べる（F. Johnの方法）

②重みつき最大値ノルムを持つ空間において実際に解を構成し（逐次近似法），それが可能となる条件を調べる

の２つの解析を行う。いずれも単独でも意義のあるものであるが，それらをあわせることでその条件の最適性を確認できる。

解析の過程で，解の減衰評価や３次元空間におけるホイヘンスの原理との関係などを調べる必要がある。また，解析の工夫により，爆発時の解のライフスパンの評価も得ることができるだろう。

以上により得られた「条件」が何に起因しているかを解析し，この初期値問題の特徴を解明する。

４．研究成果

本研究により得られた主な成果は以下のとおりである。

(1) u, v ともに初期値関数は台が非コンパクトで，遠方で多項式オーダーで減衰しているものとするが，その減衰オーダーが異なる場合を解析した。weakly coupled systems ではとくに特有の性質を見ることができなかったが，strongly coupled systems では古典解の爆発条件および時間大域解の存在条件の両方を調べた結果，解の存在・非存在を分ける最適な条件を得ることができた。また，解が爆発する場合には，一部のケースにおいて解の最大存在時間（ライフスパン）の評価も得ることができた。

ここで得られた解の存在・非存在を分ける「条件」とは，初期値関数の２種類の減衰オーダーと非線形項の４つの冪とのバランスを表したやや複雑なものである。初期値の減衰オーダーをそれぞれ μ, ν としたとき，この臨界を $\mu\nu$ 平面上に図示すると，非線形性によって定まる折れ線となる。また，仮に非線形のトータルの冪が等しく，２つの減衰オーダーも等しいとすると，単独方程式における臨界減衰（方程式の形のみによって定まる）が現れる。以上により，初期値の減衰に関するこの「条件」は単独方程式に対する条件の一般化とみなすことができ，また，それは方程式の形に依存して決まることがわかる。

ここで，特に非線形項のトータルの冪が等しい場合，つまり，

$$\begin{cases} \Box u = |u|^{\alpha}|v|^{\beta} \\ \Box v = |u|^{\gamma}|v|^{\delta} \end{cases}$$

における $\alpha+\beta=\gamma+\delta=p$ の場合にこの結果を考察すると，以下のような系の性質が明らかになった。

① 非線形項のトータルの冪 p およびそれを構成する全ての冪（$\alpha, \beta, \gamma, \delta$）を固定する。このとき，単独方程式で解の時間大域存在を保証するような初期値の減衰を一方に与えても，もう一方の減衰度合いが悪ければ解が爆発することがある。逆に，単独方程式で解が爆発するような初期値の減衰を一方に与えても，もう一方の減衰が良ければ時間大域解を構成することができる。

② 非線形項のトータルの冪を同じく p とし，２つの初期値の減衰もそれぞれ固定する。このとき，p 次の非線形を構成する u, v のバランスによっては，時間大域解が存在することも解が爆発することもいずれも起こりうる。

①②はいずれも単独方程式とは異なる系特有の現象であり，これは初期値の設定が異なるために起こったものである。特に②は以下に述べる背景を踏まえると興味深い性質である。

非線形項のトータルの冪が p で等しいときは，既存の結果とその応用により，一般にこれは系でありながら，対応する単独方程式

$$\Box u = |u|^{p}$$

と，解の存在・非存在の条件は同じものとなると考えられていた。これを覆した結果として主に以下の２点が知られている。

ひとつは，K.Kubo-K.Tsugawa により，非線形項のトータルの冪が等しいときには，伝播速度が異なり，$p>2$ であれば時間大域解が存在することが示されている。単独方程式では $p=1+\sqrt{2}$ が臨界値となって解の存在・非存在が分かれていたので，これは系特有の現象である。もうひとつは H.Takamura による結果である。通常，初期値は十分小さいとして解析するが，ここでは小さい初期値と大きい初期値を組み合わせた系が解析された。その結果，非線形項のトータルの冪が3より大（単独方程式では時間大域解が存在）とすると，初期値の大きさと非線形性とのバランスのによって解の存在・非存在が分かれることが可能であることが明らかになった。これらにより，「伝播速度の違い」および「初期値の大きさの違い」が系に系特有の状況を生み出す重要な鍵となっていることがわかっている。

本研究による先述の②の成果は，伝播速度は等しく，初期値は共に十分小さいとした上で，系特有の性質を引き出したものである。つまり，新たに「初期値の減衰度合いの違い」も重要な鍵であることを示している。しかも，それがほんのわずかな違いであったとしても起こりうるのである。非線形波動方程式系の構造がより詳細に新しい視点から解明されたことになり，国内外における非線形波動方程式の一般論の研究に与える影響は大きいと考える。

(2)一方の初期値関数の台はコンパクト，もう

一方の台は非コンパクトである場合を解析した。このケースについては，一方にコンパクト台を設定したため，解析する積分方程式の一部の項にホイヘンスの原理が成り立ち，それを考慮すると解析が非常に複雑で困難となる。そのため，得られた条件が最適であるかどうかはまだ確認できていない。しかし，古典解が爆発するための十分条件を得ており，この初期値の設定が解の挙動へ及ぼす系特有の影響がある場合があることを爆発の立場から確認した。

以上の結果は，研究集会やセミナーなどで発表した。また，論文としてまとめて雑誌に投稿準備中である。

今後の展望としては，(2)についてはここで得た爆発条件の最適性を確認する必要がある。また，空間次元との関係を調べるため，他の次元における解析を進める必要がある。これらにより，非線形波動方程式系のさらに詳細な性質が明らかになると期待できる。

５．主な発表論文等

６．研究組織

(1)研究代表者

黒川　友紀（KUROKAWA YUKI）
米子工業高等専門学校・一般科目・講師
研究者番号：５０３７５３７５