

平成 21 年 5 月 7 日現在

研究種目：若手研究 (B)

研究期間：2006 ～ 2008

課題番号：18740127

研究課題名 (和文) 超弦理論および量子重力理論の非摂動論的定式化に関する研究

研究課題名 (英文) Nonperturbative study of superstring and quantum gravity

研究代表者

永尾 敬一 (NAGAO KEIICHI)

茨城大学・教育学部・准教授

研究者番号：10391731

研究成果の概要：

非可換 CP^2 と 2 次元非可換球面の両方を古典解に持つような 8 次元の行列模型において、時空とゲージ群の力学的生成と安定性を数値計算による非摂動論的アプローチと 1-loop の摂動計算による解析的アプローチの両面から調べ、この行列模型の非摂動ダイナミクスを明らかにした。また、行列模型におけるカイラルフェルミオンの定式化を念頭に、格子ゲージ理論において 4+2 次元で定式化されている vortex fermion の考察を行った。そして、ゼロモード解は余分の 2 次元空間には依存せず vortex 核の所に一つしか存在しないという結果を得た。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合 計
2006 年度	1,000,000	0	1,000,000
2007 年度	700,000	0	700,000
2008 年度	800,000	240,000	1,040,000
年度			
年度			
総 計	2,500,000	240,000	2,740,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学、素粒子・原子核・宇宙線・宇宙物理

キーワード：素粒子(理論)、超弦理論、行列模型、非可換幾何、格子ゲージ理論

1. 研究開始当初の背景

重力を含んだ 4 つの力全てを統一した理論を構築し得る最有力候補とされているのが超弦理論である。90 年代後半、その超弦理論の非摂動論的定式化の一つの試みとして種々の行列模型が提唱された。そのうちの 하나가、IIB 型超弦理論を行列正則化した IKKT 行列模型[N. Ishibashi, H. Kawai, Y. Kitazawa and A. Tsuchiya, *A Large- N Reduced Model as Superstring*, Nucl.

Phys. B498 (1997) 467-491]である。IKKT 行列模型は 10 次元時空におけるヤン・ミルズ理論を次元還元して得られる行列模型であり、種々の興味深い性質を持っている。しかし、行列模型には数多くの未解決問題が残されているという状況であった。

未解決問題の一つが時空解釈の問題である。IKKT 行列模型は、ボゾン行列の固有値を時空座標と解釈することで 10 次元 $N=2$ の超対称性を持ち、古典解として BPS

D-brane を含んでいる。また、古典解が表わす時空は行列で書けていることから非可換時空を成している。そして、古典解の周りで展開すると非可換時空上でのゲージ理論が得られるのだが、IKKT 行列模型がいかに曲がった時空を含んでいるのかという問題は未解決であった。

他の未解決問題としては、インデックスの構成の問題が挙げられる。行列模型は、10次元時空で定式化されており、我々の現実の世界（4次元時空）を記述する標準模型を導出するためには、余分な6次元空間を(Dirac 演算子の)非自明なインデックスを持たせながらコンパクト化しなければならない。行列模型では、時空が行列で表わされ非可換幾何をなすことから、これは、有限非可換幾何で非自明なインデックスを構成しなければならないことを意味する。この問題は、純粋数学の観点からも興味深い課題であるが、一般に、インデックスは無限自由度系で定義される概念であり、有限自由度系での定式化は困難と考えられてきた。しかし、格子状の離散的な時空上で記述した有限自由度系の場の理論である格子理論において、近年、インデックスの定式化がなされた。そこで鍵となったのが、Ginsparg-Wilson (GW) 関係式[P. H. Ginsparg and K. G. Wilson, *A Remnant of Chiral Symmetry on the Lattice*, Phys. Rev. D25 (1982) 2649-2657]と admissibility condition [M. Luscher, *Topology of lattice gauge fields*, Commun. Math. Phys. 85 (1982) 39]と言われるゲージ場の揺らぎを抑える条件である。GW 関係式は、格子上でカイラル対称性を表わした式で、有限のカットオフ（格子間隔）を含んでいるという特徴を持つ。格子間隔をゼロにする連続極限をとれば、通常の連続理論でのカイラル対称性を表わす式に帰着する。行列模型がカットオフ（行列サイズ）を含んだ理論であることから、GW 関係式を行列模型にも適用できると考えられる。この着想に基づき、私は、共同研究者とともに、一般の有限非可換幾何かつ背景ゲージ場の下でGW 関係式を満たす Dirac 演算子およびインデックスを構成するための処方箋を提唱し、具体例として、2次元非可換球面上でそれらを実際に構成した。この Dirac 演算子は、2次元非可換球面上で、①カイラル対称性を持ち、②非物理的自由度を含まない、唯一の Dirac 演算子である。以上から、この GW 関係式に基づく定式化は行列模型におけるインデックスの解析に有効であることが明らかになっていた。一方、admissibility condition の行列模型における有効性についての詳細な解析はなされていなかった。

2. 研究の目的

我々の時空がなぜ4次元で、宇宙はどのように始まったのか、といった根源的な問に答えるためには、4つの力の統一理論を構築することが必要である。上述したように行列模型はその有力なアプローチの一つである。この行列模型における未解決問題を解決することで統一理論の構築を目指すことが本研究の目的である。

3. 研究の方法

行列模型における未解決問題のうち、時空解釈の問題とインデックスの構成の問題に解析的手法と数値的手法の両面から取り組んだ。

時空解釈の問題に対する一つのアプローチは、行列模型の作用に Chern-Simons 項を付け加え、初めから曲がった時空を古典解に持つ行列模型を考察することである。そのような行列模型の一つの例として、Chern-Simons 項を加えた3次元のボゾニック行列模型が挙げられる。この模型は、SU(2)代数で表現される2次元非可換球面を古典解に持ち、ボゾン場を古典解の周りで展開することで非可換球面上でのゲージ理論が形成されるのだが、もし、非摂動論的に安定な真空で球面が同心円状に k 枚重なった系が実現されたならば、D-brane 的解釈によって非可換球面上で $U(k)$ ゲージ群が生成されたことを意味する。つまり、この模型は、時空とゲージ群の力学的生成を同時に調べることができるという点で興味深い。私は、以前に共同研究者とともに、この模型における非可換球面時空とゲージ群の力学的生成と非摂動論的安定性を数値計算による非摂動論的アプローチと 1-loop の摂動計算による解析的アプローチの両面から詳しく調べた。その結果、既約な2次元非可換球面解が large N 極限で量子論的に一番安定であり、可約解は準安定状態としてのみしか存在し得ないということがわかった。また、Chern-Simons 項が無い場合には、(中身の詰まった)ボール状の時空分布が得られるのだが、Chern-Simons 項の非負の比例実係数パラメーター α が小さい領域にボールの相、大きい領域に球面の相があり、両者の間で一次相転移があること、さらに、球面上で生成されるゲージ群が $U(1)$ であることがわかった。このように、初めから曲がった時空を古典解に持つ行列模型を解析するというアプローチは、行列模型の時空生成のメカニズムを明らかにするうえで有効であり、2次元非可換球面だけでなく、他の様々な非可換時空を古典解

に持つ行列模型で非摂動ダイナミクスを調べることが可能である。

次に、インデックスの構成の問題に関しては、前述したように GW 関係式が重要な役割を果たす。実際、格子上でカイラルゲージ理論が構成された際には、GW 関係式が非常に有効的に機能したわけであるが、もう一つの重要なアイデアとして、ゲージ場の揺らぎを抑える *admissibility* 条件が知られている。*admissibility* 条件を課すと、ゲージ場の配位空間に位相的構造が実現される。行列模型や非可換幾何学においても、このような条件が有効に機能するのではないかと予想され、数値的に調べることが原理的に可能である。具体的には、ゲージ場を表わす行列をランダムに発生させ、*admissibility condition* を満たすものを拾い、そのインデックスを計算するという手順である。

4. 研究成果

私は共同研究者とともに、時空解釈の問題に対する研究として、SU(3)リー代数の構造定数をもつチャーン・サイモン項を加えた 8 次元行列模型における時空とゲージ群の力学的生成と非摂動論的安定性を、数値計算による非摂動論的アプローチと 1-loop の摂動計算による解析的アプローチの両面から詳しく調べた。この行列模型は、非可換 CP² に加えて、2 次元非可換球面も古典解に持つ。非可換 CP² とは、2 次元非可換球面に類似的なある種の 4 次元球面であり、SU(3)リー代数を用いて表現される。まず、摂動計算により、非可換 CP² と 2 次元非可換球面のそれぞれにおいて可約解よりも既約解の方が安定であり、可約解は準安定状態としてのみしか存在し得ず、力学的に生成されるゲージ群は、非可換 CP² と 2 次元非可換球面の両方の場合において U(1)であることを示した。また、Chern-Simons 項が無い場合には、ヤン・ミルズ行列模型として知られ、(中身の詰まった)ボール状の時空分布が得られるのだが、Chern-Simons 項の非負の比例実係数パラメーター α が小さい領域にボールの相、大きい領域に非可換 CP² または 2 次元非可換球面の相があり、両者の間で一次相転移があることを示した。図 1 と図 2 は、それぞれ、非可換 CP² もしくは 2 次元非可換球面からシミュレーションを開始した場合に、[球の半径]² に相当する量を行列サイズ N と様々な $\bar{\alpha}$ ($= \alpha N^{1/4}$) もしくは α チルダ ($= \alpha N^{1/2}$) に対してプロットした図である。それぞれ、 $\bar{\alpha}$ が 2.3 もしくは α チルダが 3.2 付近で一次相転移していることがわかる。この相転移点における α の値は、量子論的に安定な解が存

在し得る範囲を評価することで解析的にも求められる。さらに、既約な 2 次元非可換球面解が large N 極限で量子論的に一番安定であることを示すとともに、数値計算により、 α と N が大きい限りトンネル効果が抑制されるために非摂動レベルで非可換 CP² 解が安定であることを明らかにした。

図 1

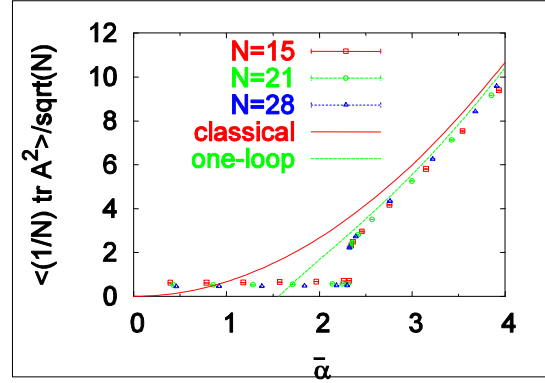
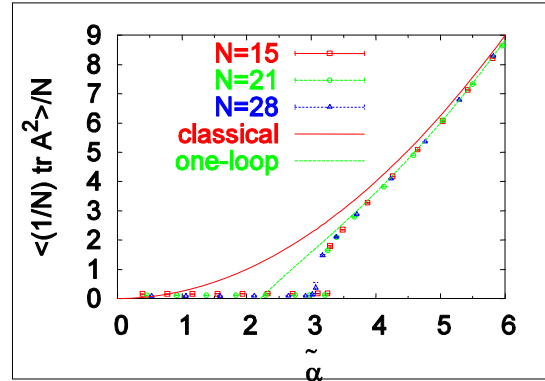


図 2



次に、インデックスの問題に関して、格子理論で知られる *admissibility* 条件が行列模型においても有効であるという予想に基づき、非可換トーラス上における *admissibility* 条件の解析を試みたが、当初の予想に反して数値計算に非常に時間がかかるため有効性を検証することが困難であることがわかった。計算機の性能に限界があることなどから、非可換トーラスにおける *admissibility* 条件の解析については再考を行うこととし、他のアプローチを現在も模索しているところである。一方、格子カイラルゲージ理論の定式化は行列模型におけるカイラルゲージ理論の定式化と深く関連しており、格子理論において GW 関係式に基づく定式化を展開させることは行列模型においてカイラルフェルミオンを記述する上で非常に有効である。そこで、私は格子カイラルゲージ理論の構成に

関する研究を行った。具体的には、私が以前に定式化した *vortex fermion* の解析に取り組んだ。これは 4+2 次元の格子空間で記述されており、余分の 2 次元空間座標に依存したゼロモード解があるという結果を以前に得ていた[K. Nagao, *Vortex fermion on the lattice*, Nucl. Phys. B636 (2002) 264–290]。一方、Neuberger は、hep-lat/0303009 において、連続な 2 次元を余次元としてもつ *vortex fermion* 模型を考察し、余次元に依存するゼロモードが存在しないことを論じた。私はこの指摘に基づき、以前に発表した論文の再検討を行った。その結果、ゼロモード解を導出する際に二つの方程式のうちのの一つを見落とすというミスをしていたことが判明した。そこで、この方程式を含めて再計算した結果、Neuberger の指摘が正しいことを確認し、関連する全ての計算と記述の誤植を発表した。この結果、ゼロモード解は余分の 2 次元空間には依存せず *vortex* 核の所に一つしか存在しないという結果を得た。なお、この誤植において、規格化可能なゼロモードが *vortex* の核に現れるという本論文の主要な結果は変更されていない。

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

〔雑誌論文〕(計 3 件)

- ① Keiichi Nagao、Erratum to: “Vortex fermion on the lattice”[Nuclear Physics B636 (2002) 264–290]、Nuclear Physics、B800、p.401-404、2008 年、査読有り
- ② Keiichi Nagao、Ginsparg-Wilson Relation and Admissibility Condition in Noncommutative Geometry、Progress of Theoretical Physics Supplement、171、p.232–235、2008 年、査読無し
- ③ Takehiro Azuma、Subrata Bal、Keiichi Nagao and Jun Nishimura、Dynamical aspects of the fuzzy CP^2 in the large N reduced model with a cubic term、Journal of High Energy Physics、0605:061、p.1-27、2006 年、査読有り

〔学会発表〕(計 1 件)

- ① Keiichi Nagao、Ginsparg-Wilson Relation and Admissibility Condition in Noncommutative Geometry、Noncommutative Geometry and Quantum Spacetime in Physics 21st Nishinomiya-Yukawa、Memorial Symposium on Theoretical Physics、2006 年 11 月 14 日、夙川公民館

〔その他〕

ホームページ等

茨城大学研究者情報総覧
<http://info.ibaraki.ac.jp/Profiles/12/0001140/profile.html>

6. 研究組織

(1) 研究代表者

永尾 敬一 (NAGAO KEIICHI)

茨城大学・教育学部・准教授

研究者番号：1 0 3 9 1 7 3 1

(2) 研究分担者

(3) 連携研究者