様式 C-19

科学研究費補助金研究成果報告書

平成　21　年　3　月　31　日現在

研究種目：若手研究（B）
研究期間：2006～2008
課題番号：18740227
研究課題名（和文）　結び目・3 次元多様体の量子不変量の幾何学と物理への応用

研究課題名（英文）　Geometry of Quantum Invariants of Knots and 3-Manifilds, and Its Applications to Physics

研究代表者
　樋上　和弘（HIKAMI　KAZUHIRO）
　鳴門教育大学・大学院学校教育研究科・准教授
　研究者番号：60262151

研究成果の概要：
結び目・3 次元多様体の量子不変量と双曲幾何学・保型形式との関連を考察した。保型性を用いて漸近展開を解析するとともに、量子ダイログ函数を用いて新しい不変量を構成し、その幾何学的な性質を解析した。また、量子不変量の手法を量子ホール系に適用して、エンタングルメント・エントロピーを厳密に計算した。その結果、エントロピーにおける粒子の量子次元の役割を明らかにした。

交付額

（金額単位：円）

	直接経費	間接経費	合　計
2006 年度	1,600,000	0	1,600,000
2007 年度	1,000,000	0	1,000,000
2008 年度	900,000	270,000	1,170,000
年度			
年度			
総　計	3,500,000	270,000	3,770,000

研究分野：　数物系科学
科研費の分科・細目：物理学・数理物理・物性基礎
キーワード：数理物理

１．研究開始当初の背景

1980 年代半ばにジョーンズによって新しい結び目不変量が発見されて以降、量子群の発展とともに、さまざまな結び目不変量が構成された。また、ウィッテンはチャーン・サイモンズ汎函数を用いて 3 次元多様体の不変量を新しく構成した。このウィッテン不変量は、後にレシェティヒンとトゥラエフによって結び目不変量を用いて数学的に厳密に再構成された。これら結び目・3 次元多様体の新しい不変量は量子不変量と呼ばれ、物理・数学両サイドからの貢献によって飛躍的に発展してきた。しかしながら、量子不変量の幾何学的背景は不完全なまま十分に理解されておらず、また実際の物理系への応用はあまり考えられることがなかった。
量子不変量の幾何学的解釈への手がかりとしてあげられるのが、1997 年にカシャエフによって提唱された体積予想である。彼は量子ダイログ函数を用いて構成した結び目不変量の極限値を考察し、その漸近的な振る舞い

は結び目補空間の双曲体積によって定まると予想した。後に、村上斉・村上順によって、カシャエフの不変量は色つきジョーンズ多項式の特殊値であることが示された。色つきジョーンズ多項式は量子群を用いた構成方法がよく知られている素性のよい量子不変量であるため、体積予想がより注目を集めるきっかけとなった。
一方、ショアによる量子計算を用いた素因数分解アルゴリズムの発見以降、量子情報の研究が盛んに行われてきた。量子計算を実現するためにはさまざまな障害が存在するが、その中で最も重要なものがデコヒーレンスである。この問題を打開するため、フリードマン、キタエフらは位相的量子計算を考え出した。この位相的量子計算を実現する舞台として提唱されているのが、量子ホール系である。低次元物理系、とくに量子ホール系において位相的秩序の重要性は古くから知られていたが、量子不変量の最新の研究成果が取り込まれることはなかった。

２．研究の目的

ジョーンズ多項式、ウィッテン不変量に代表される結び目・3 次元多様体の量子不変量の幾何学的な意味づけを探り、また物理系への応用を研究するのが本研究の目的である。

(1)量子不変量の幾何学

①. 1999 年にローレンスとザギエによって、ポアンカレ球の SU(2)ウィッテン不変量が、保型形式と密接な関係にあることが指摘された。その後、さまざまなザイフェルト多様体のウィッテン不変量、およびトーラス結び目・絡み目の色つきジョーンズ多項式についても、保型形式との関連性が示された。ここで現れる保型形式は、共形場理論における指標と見なされるものである。これらの結果をさらに発展させ、他の 3 次元多様体のウィッテン不変量を具体的に計算し、保型形式との関係を探る。また SU(2)以外のゲージ群についても同様な関係が成り立つのか、研究を進める。また、共形場理論と量子不変量との関係についても新しい対応関係があるのかを探る。
②. 体積予想で指摘されているのは、色つきジョーンズ多項式の特殊値での振る舞いである。その特殊値以外では不変量はどのようにふるまうのかをさまざまな結び目について解析する。それによって、量子不変量の幾何学的な理解がより深まるものと思われる。

(2)物理への応用

フリードマン、キタエフらにより、耐障害性のある量子計算のモデルとして、位相的量子計算が提唱されている。低次元物理系の臨界現象における共形場理論の役割はよく知られているため、量子不変量と共形場理論との関連をより深く探ることによって、位相的量子計算への応用を研究していく。

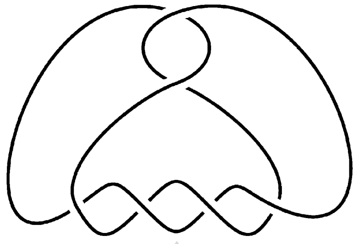
３．研究の方法

さまざまな結び目・3 次元多様体の量子不変量を解析するに当たり、計算機を用いて数式処理・数値計算を適宜行う。Pari/GP、Matlab や Mathematica などのソフトウェアを用いて、研究を効率的に行う。
様々な分野の専門知識を得るため、専門書を購入する。
内外の研究集会に出席して最新の研究動向を探り、新しい知見を得る。また、トポロジー、数論などの様々な研究者と実際に会って議論を活発に行う。

４．研究成果

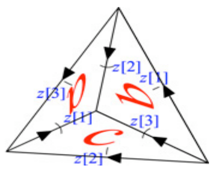
本研究によって得られた成果のうちいくつかは、すでに国際専門誌に投稿、受理され出版されている。
以下、論文別に解説する。

(1)ツイスト結び目（下図が一例である）の色つきジョーンズ多項式の漸近的な振る舞いを解析した。その結果、不変量のある極限値を調べることにより、結び目の A 多項式が得られることを示した。（論文⑥）



(2) あるザイフェルト多様体の SU(2) ウィッテン不変量を構成し、q 解析の手法を用いて、普遍ウィッテン・レシェティキン・トゥラエフ不変量を導出した。また、保型形式との関連性を明らかにし、保型性を用いて不変量の漸近展開を厳密に導いた。
また、数学史上に名高いラマヌジャンのハーディへの最後の手紙において現れる擬テータ函数との関連についても議論した。（論文⑤）

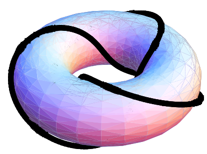
(3) 体積予想のもととなったカシャエフの不変量は量子ダイログ函数の 1 の冪根での値を用いて構成された。この考えを拡張し、より性質のよい量子ダイログ函数を用いて、解析、幾何の両面から考察した。ペンタゴン方程式の解を量子ダイログ函数を用いて構成し、その解が 3 次元双曲空間における向き付けられた理想四面体（下図）として解釈できることを示した。この幾何的解釈に基づき、双曲多様体の新しい量子不変量を構成した。さらに、その漸近的な振る舞いを双曲幾何学の観点から考察し、結び目補空間の双曲体積との関連性を明らかにした。（論文④）



(4) ザイフェルト多様体は特異点と密接な関係がある。特異点の分類はアーノルドらによって確立されており、ADE 型特異点はその代表的な例である。この分類によれば、ADE 型以外に 14 個のユニモダル型特異点が存在し、それらにはアーノルドの「奇妙な双対性」が存在することが知られている。 ザイフェルト多様体の SU(2) ウィッテン不変量の解析に基づき、奇妙な双対性が絡み形式を用いて解釈できることを示した。ウィッテン不変量からみた双対性については現在論文を準備中である。（論文③）

(5) 量子不変量の量子情報理論への応用として、フリードマン、キタエフらの位相的量子計算があげられる。位相的量子計算の実現舞台として、量子ホール型のうち非アーベル型準粒子をもつものが考えられている。こうした準粒子を用いて量子計算を効率よく行うためには、準粒子の量子性をうまく利用することが重要である。この準粒子の量子性を測る一つの例として、エンタングルメント・エントロピーが挙げられる。しかしながら、一般にこのエントロピーを物理系において厳密に計算するのは困難である。そこで、量子不変量における手法を用いることによって、非アーベル型準粒子系のエンタングルメント・エントロピーを計算することに成功した。その結果、準粒子の量子次元と呼ばれる量がエントロピーに現れることを明らかにした。（論文②）

(6) 体積予想によると、色つきジョーンズ多項式の特殊値は、表現の次元とともに指数関数的に増大する。八の字結び目、およびトーラス結び目（下図が一例）に対し、体積予想以外の特殊値における色つきジョーンズ多項式の漸近的な振る舞いを解析した。その結果、多項式的に発散する点があることを明らかにし、またアレキサンダー多項式との関連性についても議論した。（論文①）



以上、述べてきたように、量子不変量と幾何学との関連、および量子不変量の物理への応用という面から一定の成果を挙げられたものを確信する。

幾何学的考察に基づいて量子ダイログ函数を用いて新しい量子不変量を構成したが、海外の研究者によってもこの不変量の重要性が認識されつつあり、さらなる解析が必要であろう。
また、色つきジョーンズ多項式や SU(2) ウィッテン不変量がラマヌジャンの擬テータ函数と密接な関連があることを指摘したが、擬テータ函数は超弦理論や超対称共形場理論においても現れることが指摘されており、本研究成果のさまざまな活用が期待される。
今後、こうした解析的な手法、および幾何学的な解釈、を位相的量子計算研究においても

用いることが重要であると思われる。

５．主な発表論文等
（研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線）

〔雑誌論文〕（計　６　件）

①. K. Hikami and H. Murakami, Colored Jones Polynomial with Polynomial Growth, Communications in Contemporary Mathematics 10 Suppl. 1, 815-834 (2008)
②. K. Hikami, Skein theory and topological quantum registers: braiding matrices and topological entanglement entropy of non-abelian quantum Hall states, Annals of Physics 323, 1829-1769 (2008)
③. K. Hikami, Duality of linking pairing in Arnold’s singularities, Proceedings of Japan Academy 84 Series A, 81-86 (2008)
④. K. Hikami, Generalized volume conjecture and the A-polynomial - the Neumann-Zagier potential function as a classical limit of partition function, Journal of Geometry and Physics 57, 1895-1940 (2007)
⑤. K. Hikami, Hecke type formula for unified Witten-Reshetikhin-Turaev invariant as higher order mock theta functions, International Mathematical Research Notices 2007, rnm022, 32 pages (2007)
⑥. K. Hikami, Asymptotics of the colored Jones polynomial and the A-polynomial, Nuclear Physics B 773, 184-202 (2007)

〔学会発表〕（計　３　件）

①. K. Hikami, Around the Volume Conjecture, Workshop on Quantum Discrete Integrable Systems, Newton Institute, 2009 年 3 月
②. K. Hikami, From the quantum dilogarithm function to the A-polynomial, Workshop on Geometry and Integrability, Melbourne University, 2008 年 2 月
③. 樋上、量子不変量と保型形式に関連した話題、日本数学会秋季総合分科会招待講演、大阪市立大学、2006 年 9 月

６．研究組織
(1)研究代表者
樋上　和弘
鳴門教育大学・大学院学校教育研究科・准教授

(2)研究分担者
なし

(3)連携研究者
なし