

平成 21年 6月 9日現在

研究種目：若手研究（B）  
 研究期間：2006～2008  
 課題番号：18740241  
 研究課題名（和文） 可積分量子系および近可積分量子系に対する新しい準位統計理論の構築  
 研究課題名（英文） Study of the energy level statistics for classically integrable and nearly integrable quantum systems

研究代表者  
 牧野 浩典 (MAKINO HIRONORI)  
 東海大学・情報理工学部・准教授  
 研究者番号：40338786

研究成果の概要：本研究によって量子系のエネルギー準位に新しい法則が見出される可能性を示すことができた。ある種の対称性を持つ量子系（古典系が積分可能である量子系）には、エネルギー準位に異常な揺らぎが発生することが過去の研究によって証明されている。本研究はこの揺らぎを準位数分散やスペクトル硬度などの統計量によって特徴づける新しい理論を考案し、大きく分けて3種類の揺らぎが生じることを明らかにしている。

交付額

(金額単位：円)

	直接経費	間接経費	合計
2006年度	1,000,000	0	1,000,000
2007年度	800,000	0	800,000
2008年度	1,000,000	300,000	1,300,000
年度			
年度			
総計	2,800,000	300,000	3,100,000

研究分野：数物系科学

科研費の分科・細目：物理学・数理物理・物性基礎

キーワード：エネルギー準位統計 量子カオス 非線形科学

## 1. 研究開始当初の背景

古典力学系が完全可積分であるならば、対応する量子系のエネルギー準位列はランダムになり、ポアソン過程に一致することが広く知られている。この量子系と古典系間の対応関係については量子カオスの研究分野において30年にもわたり注目され、多くの知見が積み上げられてきた。

古典系が可積分の場合、1本の軌道は位相空間のトーラス曲面に閉じ込められ、その内部でのみ運動が許される。リュエビル・アーノルドの定理によると、位相空間は無数の不

変トーラスによって分割された無限小の体積を持つ無数の独立領域から成る。一方、対応する量子系の個々のエネルギー固有状態は半古典極限において、量子数によって定められるトーラス平面内に閉じ込められ、無数の部分系に分かれる。従って可積分量子系のエネルギー準位列は各無限小領域から供給される無数の独立な準位列成分の重ね合わせであらわされる。実際、準位配列がポアソン過程に一致する原因は、このような独立性による結果であると考えられており、エネルギー準位間隔分布などを調べている数多くの研究事例に支持され、現在では物理系の詳

細には依存しない量子・古典対応の普遍則として広く認知されている。しかし、一般論としての完全な証明は与えられておらず、さらに幾つかの系において、ポアソン則から外れる厳密な証明も報告されているため、無数の準位成分から成る系の準位統計を理論的に調べることは重要である。

そこで我々は独自のアイデアを考案し2003年に論文発表した[1]。簡単に述べると、ベリーとロブニックによって考え出された準位統計の半古典理論を、メータによって構築されたエネルギー準位の重ね合わせ理論に適用する。ここで可積分量子系のエネルギー準位列が古典系の無限小相体積のトラス構造から供給される無限個の部分列の独立な重ね合わせで出来ているという仮定を設ける。この仮定のもとで準位間隔分布・準位ギャップ分布関数などの短距離スペクトル統計に関する理論公式群を準位成分の数を無限大にとる極限として導くというものである。実際、2003年に我々は、このアイデアによって短距離スペクトル統計に関する新しい公式群を導出することに成功した。この公式群の振る舞いは位相空間の幾何学的構造によって決定されるパラメータ関数に依存し、パラメータ関数の振る舞いに応じて準位列がポアソン統計を示すための条件やポアソン統計から外れる条件を与えてくれる。さらに、別の新しい統計則が生じる可能性をも示唆している。実際に我々はエネルギー準位が系の持つ対称性を原因とする強い集積を持つときに、準位間隔分布が漸近ポアソン分布やサブポアソン分布に一致する可能性を証明した。また、ベリアード力学系に対する数値シミュレーションによって、漸近ポアソン分布が得られる事例を発見した。

このように量子系の短距離スペクトル統計に関する研究においては多くの成果を得ることができたが、量子系のスペクトル揺らぎに関するより一般的な表現である長距離スペクトル統計に対してはまだ手付かずの状態であった。

## 2. 研究の目的

### 目的1

可積分量子系の2準位相関関数・スペクトル硬度・準位数分散を独立なエネルギー準位の成分を無限大にとる際の極限として導出する。この極限において得られる新しい極限関数を用いて、可積分量子系の長距離スペクトル揺らぎの性質を理論的に解明する。すなわちエネルギー準位列の短距離スペクトル統計がポアソン統計、漸近ポアソン統計、サブポアソン

統計を示す条件下で、新たに導出された極限関数の性質を明らかにする。

### 目的2

短距離スペクトル統計と長距離スペクトル統計の関係をパラメータ関数のレベルで繋ぎ、可積分量子系のエネルギー準位統計に対する新しい理論体系を構築する。すなわち長距離スペクトル統計のパラメータ関数を短距離スペクトル統計のパラメータ関数の無限和として導出し、2種のパラメータ関数を結びつける新しい関係式を考案する。

## 3. 研究の方法

本研究課題の中心は理論研究であるため、まず考案した前述のアイデアに基づいて、長距離スペクトル統計に関する分布関数群の数学的な導出過程を整備する。具体的には、2003年の研究論文[1]で発表した極限準位間隔分布の公式を高次の相関モーメントを含む一般的な公式に書き換え、次数に対して無限和をとることにより、2準位相関関数、準位数分散、スペクトル硬度などを導出する。得られた分布関数群の性質を評価し、エネルギー準位列がポアソン統計に支配される条件や、そこから外れる条件を整理する。得られた分布関数群をさらに詳しく分析し、短距離スペクトル統計において発生することが示された3種類の揺らぎに対し、分布関数群がどのように振る舞うのかを明らかにする。次に高速なコンピュータを用いた量子系の数値シミュレーションを行い、現実の物理系と理論の整合性を検査する。

## 4. 研究成果

本研究によってエネルギー準位列の長距離の揺らぎには3つの統計クラス（ポアソン統計／漸近ポアソン統計／サブポアソン統計）が存在することが理論的に示された。また、準位数の分散を与える新しい公式を導出し、各統計クラスの差異が分散（あるいは2準位相関関数やスペクトル硬度など）の傾きに表れることを理論的に示すことに成功した。傾きの値はポアソン統計では1、漸近ポアソン統計では1以上、サブポアソン統計では3以上になることがわかった。このうち、後者の2つの統計則は準位列に強い集積が生じる場合においてのみ表れることが証明できた。

古典系が積分可能系ならば、エネルギー準位列はポアソン統計を示すというのが、これまで認知されてきた量子系の普遍則である。実際に矩形ベリアード系など幾つかの力学系では厳密証明が行なわれ、ポアソン統計が

得られることがわかっている。一方、系に内在する対称性を原因とし、量子系がポアソン則に従わなくなる事例も多く見つかっており、ポアソン統計から外れる現象を含む、より一般的な理論を展開しなければならない事情があった。例えばポアソン則の証明が成功している矩形ビリヤード系においても、システムパラメータが有理数で与えられる条件下では、ポアソン則を示さないことが証明されている[2,3]。

そこで、我々も矩形ビリヤード系に対して数値計算を行い、システムパラメータが有理数になる条件下で我々の理論の結果を裏付ける証拠を探したところ、3つのクラスの統計則が全て発生することを確認できた。このうち3番目のサブポアソン統計は、コナーズとキーティングらが1997年に発表した矩形ビリヤード系に関する研究論文[3]の中で報じている統計則と同じものであることが、本研究課題により判明した。以上の研究成果は米国物理学会(APS)の学会誌(項目5の雑誌論文①)に掲載されている。

我々が考案した準位統計の理論はエネルギー準位が無数の成分の重ね合わせでできている系においても、個々の成分に強い集積が生じれば、全体として統計的性質に特異性

が生じ、ポアソン統計から外れ、別の統計則に従うという新しい可能性を打ち出すものである。今後は多くの物理系に対し数値計算を実行し、この理論を裏付ける事例を集めてゆく必要がある。

次に本研究で得られた準位数分散の理論をブラウン運動を行う粒子の速度分散や2点相関関数への解析に応用した。水中のブラウン粒子の運動は水の慣性による影響で、短時間スケールの揺らぎが欠落し、アインシュタインの理論から外れることがレーザー観測装置を用いた実験により明らかにされている[4]。一方、我々の実験結果は水の慣性による影響よりも4桁も長い時間スケールで揺らぎ成分の欠落を検出しており、この理由がレーザー観測装置の光軸方向とそれに垂直な方向における検出限界の差異で決まることを明らかにしている。速度分散を与える無限和の公式から検出限界を超える時間スケールの揺らぎ成分を落とすところ、実験結果を上手く説明することができるようになった。上記の研究成果は米国物理協会(AIP)の学会誌(項目5の雑誌論文②)に掲載されている。

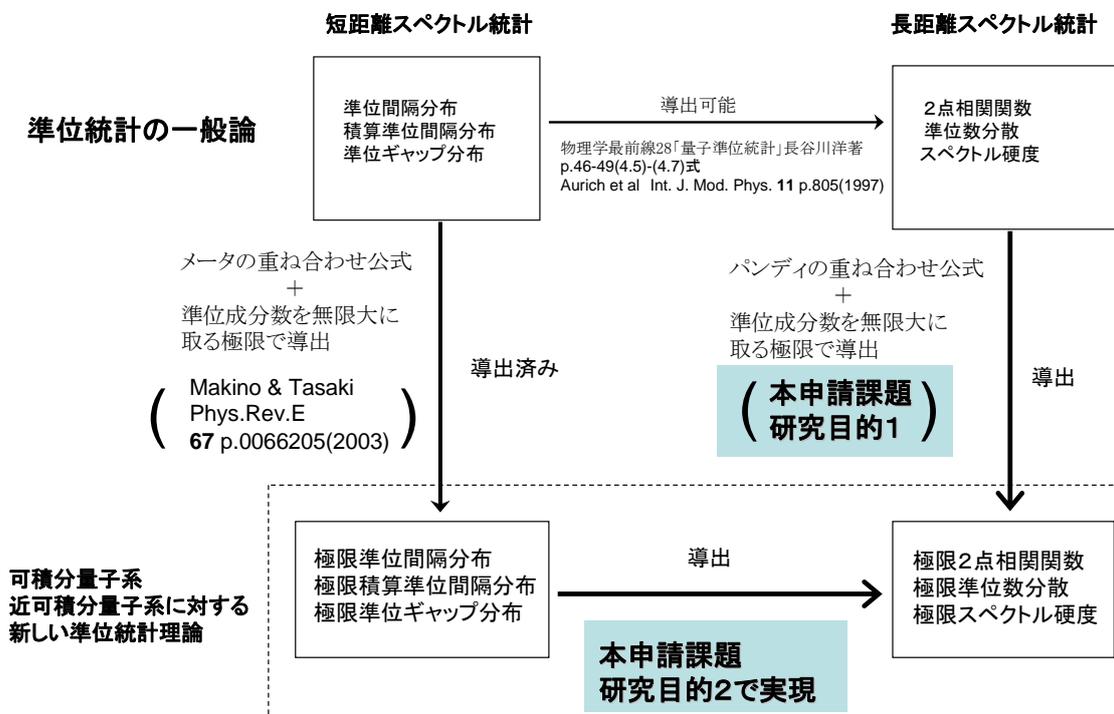


図 本申請研究における目的1と目的2で掲げた研究内容の方向性および準位統計の一般論との関係

参考文献

- [1] H. Makino and S. Tasaki, Phys. Rev. E 67, 066205 (2003).
- [2] K.M. Frahm and D.L. Shepelyansky, Phys. Rev. Lett. 78, 1440 (1997).
- [3] R.D. Connors and J.P. Keating, J. Phys. A 30, 1817 (1997).
- [4] Horber et al. Phys. Rev. Lett. 95, 160601 (2005).

5. 主な発表論文等

(研究代表者、研究分担者及び連携研究者には下線)

[雑誌論文] (計 2 件)

- ① H. Makino, N. Minami and S. Tasaki, *Statistical properties of spectral fluctuations for a quantum system with infinitely many components*, *Physical Review E*, Vol. **79**, 036201-036210 (2009)
- ② Kenju Otsuka, Takayuki Ohtomo, Hironori Makino, Seiichi Sudo and Jing-Yuan Ko, *Net motion of an ensemble of many Brownian particles captured with a self-mixing laser*, *Applied Physics Letters*, Vol. **94** (2009) 掲載決定

[学会発表] (計 1 件)

- ① 牧野浩典  
研究会「ランダム作用素のスペクトルの研究」2007年11月 京都大学

6. 研究組織

(1) 研究代表者  
牧野 浩典 (MAKINO HIRONORI)  
東海大学・情報理工学部・准教授  
研究者番号：40338786

(2) 研究分担者  
なし

(3) 連携研究者  
なし

研究協力者

田崎 秀一 (TASAKI SHUICHI)  
早稲田大学・理工学術院先進理工学部・教授  
研究者番号：10260150

南 就将 (MINAMI NARIYUKI)  
慶応大学・医学部・教授  
研究者番号：10183964

大塚 建樹 (OTSUKA KENJU)  
東海大学・情報理工学部・教授  
研究者番号：60266369