

令和 6 年 6 月 26 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18H01108

研究課題名（和文）双有理幾何学における局所理論と大域理論の結び付け

研究課題名（英文）Local-global correspondance in birational geometry

研究代表者

権業 善範（Gongyo, Yoshinori）

東京大学・大学院数理科学研究科・教授

研究者番号：70634210

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 14,130,000円

研究成果の概要（和文）：一般化された極小対数的食い違い係数についての中村勇哉氏とWei-chung Chen氏との共著論文を発表した。この論文はJMSJに出版済みである。さらに進展した研究としては、局所大域対応からみた向井型の予想の研究である。ファノ多様体に対して全指数という新しい概念を導入して、向井型予想の射影空間の特徴づけの研究を行った。アンブロ・川又の有効的非消滅予想を仮定すると成立することまでは証明できたので、その予想自体は正しそうであることまでは分かった。その結果はKyoto Math. Journalから出版される予定である。またMoraga氏と共同研究で、曲面の場合にさらに詳しいことを調べた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

研究成果の学術的意味は、オリジナルの向井予想への新しいアプローチを考えられたので十分意義があったと思う。さらにその視点からシヨクロフ学派の数学が有用であることを示唆しているので、その方向からのアプローチがMoragaらを中心に活性化させることができたので十分意味があったと思う。

研究成果の概要（英文）：I have published a paper with Yusuke Nakamura and Wei-chung Chen on the generalized minimal log discrepancies. This paper has been published in JMSJ. A further development is the study of the Mukai-type conjecture from the perspective of local-global correspondance. I have introduced a new invariant of total exponent for Fano manifolds and have studied the characterization of the projective space of the Mukai-type conjecture. I have been able to prove that the conjecture holds if we assume the Ambro-Kawamata effective non-vanishing conjecture holds, so the conjecture itself seems to be correct. The paper including the above results are will be published by Kyoto Math. Journal. I have also investigated the case of curved surfaces in more detail in collaboration with Moraga.

研究分野：代数幾何学

キーワード：MMP

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

代数多様体の研究は大域的様相と局所的様相の双方から調べることで発展してきた。その延長には、特異点の研究に例外因子などの大域的データを調べることにより不変量を取り出すなどが行われてきた。また Borisov—Alexeev—Borisov 予想(=BAB 予想)の Birkar 氏の解決を受けて、次はフリップの停止問題の解決が待たれる問題となった。従ってその解決に向かおうという流れが学会的であった。

2. 研究の目的

本研究目的は、代数多様体及び解析多様体の特異点論 (局所理論) と射影代数多様体の理論 (大域理論) を様々な不変量を通して結び付け、双有理幾何学における重要問題を解決することである。本研究では、(A) フリップの停止問題、(B) 非特異多様体の特徴づけ、(C) 射影空間の直積の特徴づけ、(D) 対数的ファノ及び対数的カラビ・ヤウ多様体の特徴づけの問題を解決すべく局所理論と大域理論の結び付けの研究を行う。

3. 研究の方法

本研究の計画と方法は、標準的な錐構成から出発して、局所理論で起こっていることを大域理論で、またはその逆を解釈する。(A) と (B) については、まず双有理幾何学における特異点の不変量である極小対数的食い違い係数 (MLD) の研究を大域的幾何におけるファノ多様体の幾何を用いてアプローチする。特にファノ指数と呼ばれる不変量との関係を明らかにしていき、最終的には MLD の ACC と下半連続性を調べる。(C) では特異点の "複雑度 (Complexity)" という不変量に対して Cox 環の射影スキームを通じて局所大域対応を展開する。(D) では、自己射を持つ代数多様体について調べる。

4. 研究成果

今回の研究プロジェクトで得た大きな結果は、一般化された極小対数的食い違い係数についての中村勇哉氏と Wei-chung Chen 氏との共著論文を発表した。この論文は日本数学会の雑誌から出版済みである。一般化された極小対数的食い違い係数とは、フィールズ賞受賞者の Caucher Birkar が BAB 予想の証明の際定義し、重要な役割を担った新しい対の概念である。近年活発に通常の対を一般化された対に拡張しようという動きがある。大きな動機付けは次元による数学的帰納法にある。一方、極小対数的食い違い係数の研究にどう次元による数学的帰納法を考えれば良いかは今後の課題である。この論文では、既存の極小対数的食い違い係数の予想や既知の結果を、一般化対に拡張していった。

さらに進展した研究としては、局所大域対応からみた向井型の予想の研究である。ファノ多様体に対して全指数という新しい概念を導入して、向井型予想の射影空間の特徴づけの研究を行った。アンブロ・川又の有効的非消滅予想を仮定すると成立することまでは証明できたので、その予想自体は正しそうであることまでは分かった。その結果は Kyoto Math. Journal から出版される予定である。また Moraga 氏と共同研究で、曲面の場合にさらに詳しいことを調べた。また、まだまとまった結果として発表できていないが、アバダンス予想、フリップの停止問題をはじめとする重要な問題について大変な進歩があったと個人的には考えている。その途中で、Deligne-Mumford 及び Artin スタックのコンパクト問題及び消滅定理についての研究をすることになり、その方向についても考えられるきっかけを得た。それらについても今後の課題として、そのような幾何的対象の MMP を含めて考えていかないとならないことを認識できたのは大変おおきな進歩と言えると思う。コロナ渦の中非常に難しい中での研究活動であり、思うようにいかないこともあったりしたが、結果としては深い思考・試行が可能になり研究的にはプラスの方向に進んだと言える。また当初の研究計画にはなかったが、極小モデル理論の基本定理の Cone Theorem の亜種の研究を韓国の延世大学の Song Rak Choi 氏と行った。この研究は、古典的な Cone Theorem と Batyrev の Cone Theorem を統合するというコンセプトの元で研究をし、新しい予想を発見した。その論文は Math. Z. に出版された。また分担者である中村勇哉氏は、柴田氏と共同研究で、商特異点に関する極小対数的食い違い係数の研究を推し進め、Inversion of Adjunction に対する決定的な結果を得た。その論文たちは雑誌 Algebraic Geometry に出版予定である(一部出版済み)。

また中村氏は正標数の極小モデル理論および対数的ファノ多様体に対する Dual Complex につい

での結果も得た。

以上のようにコロナ禍の真っ只中の研究期間であったが、それなりの研究結果を得ることができたと思う。またこの研究期間の間にもフリップの停止問題およびアバンダンス予想に対する未発表の考察・成果が得られたことは非常に良かったと思っている。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計7件（うち査読付論文 7件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Y. Gongyo, Y. Nakamura, H. Tanaka	4. 巻 21
2. 論文標題 Rational points on log Fano threefolds over a finite field	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 J. Eur. Math. Soc.	6. 最初と最後の頁 3759, 3795
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.4171/JEMS/913	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 S. Ejiri and Y. Gongyo	4. 巻 155
2. 論文標題 Nef anti-canonical divisors and rationally connected fibrations	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Compos. Math.	6. 最初と最後の頁 1444, 1456
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1112/S0010437X19007383	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Y. Gongyo and S. Takagi	4. 巻 5
2. 論文標題 Kollár's injectivity theorem for globally F-regular varieties	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 .Eur. J. Math	6. 最初と最後の頁 872, 880
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40879-018-0230-4	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Y. Gongyo, Y. Nakamura, H. Tanaka	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Rational points on log Fano threefolds over a finite field	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of the EMS	6. 最初と最後の頁 印刷中
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Y. Gongyo, S. Takagi	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Kollár's injectivity theorem for globally F-regular varieties	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 European Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 872, 880
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 S. Ejiri, Y. Gongyo	4. 巻 印刷中
2. 論文標題 Nef anti-canonical divisors and rationally connected fibrations 5. 発行年 2020年	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Compositio Math.	6. 最初と最後の頁 1444, 1456
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 CHEN Weichung, GONGYO Yoshinori, NAKAMURA Yusuke	4. 巻 76
2. 論文標題 On generalized minimal log discrepancy	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Journal of the Mathematical Society of Japan	6. 最初と最後の頁 392, 449
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2969/jmsj/90119011	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計26件 (うち招待講演 26件 / うち国際学会 18件)

1. 発表者名 権業善範
2. 発表標題 高次元極小モデル理論の構築とその応用,
3. 学会等名 2023 年度日本数学会年会代数学賞受賞講演, (招待講演)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yoshinori Gongyo
2. 発表標題 Generalized complexity and the Mukai type conjecture.
3. 学会等名 Korea-Japan Conference in Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yoshinori Gongyo
2. 発表標題 Generalized complexity and the Mukai type conjecture
3. 学会等名 The 1st Algebraic geometry Atami symposium, 熱海 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 権業善範
2. 発表標題 一般的複雑性と射影空間の直積の特徴付けに関する向井型予想について
3. 学会等名 名古屋代数幾何 学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yoshinori Gongyo
2. 発表標題 Generalized complexity and Mukai 's type conjecture.
3. 学会等名 YMSC AG seminar (Zoom) (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yoshinori Gongyo
2. 発表標題 Nef anti-canonical divisors and rationally connected fibrations
3. 学会等名 AG seminar at UCLA (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yoshinori Gongyo
2. 発表標題 On a generalized Batyrev ' s cone conjecture
3. 学会等名 Zoom Algebraic Geometry seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Yoshinori Gongyo
2. 発表標題 A generailization of Batyrev ' s cone conjecture
3. 学会等名 GMS seminar at MSRI (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshinori Gongyo
2. 発表標題 A generailization of Batyrev ' s cone conjecture
3. 学会等名 Algebraic Geometry International Conference, KIAS (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshinori Gongyo
2. 発表標題 Nef anti-canonical divisors and rationally conncted fibrations
3. 学会等名 Birational Geometry and Fano varieties, Moscow (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshinori Gongyo
2. 発表標題 ACC for LCT and Boundedness of Fano va- rieties after Birkar, Hacon, Mckernan, and Xu
3. 学会等名 第 21 回多変数関数論葉山シンポジウム (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshinori Gongyo
2. 発表標題 A generailization of Batyrev ' s cone conjecture
3. 学会等名 JHU AG seminar, (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshinori Gongyo
2. 発表標題 A generailization of Batyrev ' s cone conjecture
3. 学会等名 成功大学, コロキウム, 台南 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshinori Gongyo
2. 発表標題 A generalization of Batyrev's cone conjecture
3. 学会等名 都の西北代数幾何学シンポジウム 2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yoshinori Gongyo
2. 発表標題 A generalization of Batyrev's cone conjecture
3. 学会等名 Algebraic Geometry in Auckland (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 権業善範
2. 発表標題 Nef anti-canonical divisors and rationally connected fibrations
3. 学会等名 Birational Geometry and Arithmetic (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 権業善範
2. 発表標題 Nef anti-canonical divisors and rationally connected fibrations
3. 学会等名 Differential, Algebraic and Topological Methods in Complex Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 権業善範
2. 発表標題 Nef anti-canonical divisors and rationally conncted fibrations
3. 学会等名 Workshop on Birational Geometry and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 権業善範
2. 発表標題 On log CY structure of surfaces admitting non-trivial polarized endomorphisms
3. 学会等名 the Xiamen workshop Algebraic Surfaces and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 権業善範
2. 発表標題 My understanding of the proof of BAB conjecture
3. 学会等名 Higher Dimensional Arithmetic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 権業善範
2. 発表標題 ACC for LCT and Boundedness of Fano varieties after Birkar, Hacon, Mckernan, and Xu
3. 学会等名 Mini Workshop at Saitama University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 権業善範
2. 発表標題 有効消滅性と向井型予想について
3. 学会等名 京都大学代数幾何セミナー（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 権業善範
2. 発表標題 The Mukai type conjecture,
3. 学会等名 Recent development in Algebraic Geometry, Arithmetic and Dynamics（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 権業善範
2. 発表標題 向井型の射影空間の積の特徴づけの予想
3. 学会等名 代数幾何学城崎シンポジウム（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 権業善範
2. 発表標題 Effective non-vanishing and Mukai type conjecture
3. 学会等名 新潟代数シンポジウム（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 権業善範
2. 発表標題 向井型の射影空間の積の特徴づけの予想
3. 学会等名 湯布院代数幾何学ワークショップ（招待講演）
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

<p>Y. Gongyo's webpage https://www.ms.u-tokyo.ac.jp/~gongyo/</p>

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	中村 勇哉 (Nakamura Yusuke) (20780034)	東京大学・大学院数理科学研究科・助教 (12601)	2024年度より名古屋大学多元数理准教授に昇任

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計4件

国際研究集会 Cambridge--Tokyo Algebraic Geometry workshop	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 London-Tokyo Workshop In Birational Geometry II, Imperial College London	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 London-Tokyo Workshop In Birational Geometry	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 Birational Geometry and Algebraic Dynamics	開催年 2023年～2023年

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	UCLA			
韓国	Yonsei University			
米国	University of Utah			