

令和 5 年 5 月 20 日現在

機関番号：12601

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18H01109

研究課題名（和文）局所 Langlands 対応の幾何化

研究課題名（英文）Geometrization of the local Langlands correspondence

研究代表者

今井 直毅（Imai, Naoki）

東京大学・大学院数理科学研究科・准教授

研究者番号：90597775

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 11,000,000 円

研究成果の概要（和文）：幾何学的 Langlands 対応の手法を用いて、局所 Langlands 対応の幾何学的実現や、志村多様体の法  $p$  還元に関する研究を行った。特に  $GL(3)$  の内部形式に対する Kottwitz 予想を証明することができた。また局所 Langlands 対応の幾何化に現れる  $L$  パラメータのモジュライ空間の構造についても研究を行った。

研究成果の学術的意義や社会的意義

局所 Langlands 対応の幾何学的実現に関して、 $GL(3)$  の内部形式に対する Kottwitz 予想を証明することができた。志村多様体の幾何についても、従来の研究では知られていなかった新しい現象を発見することができており、学術的意義があると考えられる。

研究成果の概要（英文）：Using methods of the geometric Langlands correspondence, we studied the geometric realization of the local Langlands correspondence and the mod  $p$  reduction of Shimura varieties. In particular, we showed the Kottwitz conjecture for inner forms of  $GL(3)$ . We also studied the structure of the moduli space of  $L$ -parameters that appears in the geometrization of the local Langlands correspondence.

研究分野：数論

キーワード：Langlands 対応

## 様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

### 1. 研究開始当初の背景

局所 Langlands 対応とは、 $p$  進 Galois 群の表現と  $p$  進代数群の表現を結び付ける対応であり、その対応は、Rapoport-Zink 空間のエタールコホモロジーに実現されることが期待されている。このことと関連し、最近、幾何学的 Langlands 対応の定式化にあって、局所 Langlands 対応を幾何化するプログラムが Fargues によって提唱された。

### 2. 研究の目的

本研究の目的は、幾何学的 Langlands 対応の手法に関連して、局所 Langlands 対応の幾何学的実現や志村多様体の幾何に関する研究を行うことである。

### 3. 研究の方法

幾何学的 Langlands 対応の定式化において重要な役割をはたす幾何学的佐武対応の  $p$  進類似である混標数の幾何学的佐武対応を用いて、局所 Langlands 対応の幾何学的実現の研究を行う。幾何学的佐武対応は、志村多様体にも応用があり、その方向の研究も行う。

### 4. 研究成果

局所 Langlands 対応の幾何学的実現について研究を行った。特に畳み込み写像と混標数の幾何学的佐武対応を用いて、局所 Langlands 対応の幾何学的実現に関する Kottwitz 予想を  $GL(3)$  の内部形式に対して証明した。これにより、 $GL(3)$  の内部形式に対する局所 Jacquet-Langlands 関手性の幾何学的実現が得られた。

さらに  $GL(2)$  に対するシュトゥーカのモジュライの  $l$  進エタールコホモロジーを一般の余指標に対して決定した。余指標が一般で、考える  $l$  パラメータが尖点的でない場合には Kottwitz 予想の一般化はそのままでは成り立たないことが分かった。また局所志村多様体のコホモロジーに関する Harris-Viehmann 予想も、同じ形では成り立たないことが分かった。

以上の結果のためには、半安定とは限らない  $G$  束の間の修正のモジュライの  $l$  進エタールコホモロジーを用いる必要があり、その定式化についても研究を行った。

これらは論文 Convolution morphisms and Kottwitz conjecture としてまとめた。

局所 Langlands 対応の幾何学的実現のために、局所 Langlands 対応の  $l$  進係数における定式化についても研究を進めた。特に、 $C$  群や淡中局所 Langlands パラメータを用いて、 $l$  進係数の局所 Langlands 対応の canonical な定式化を二つ与え、それらが同値であることを証明した。この結果は論文 Local Langlands correspondences in  $l$ -adic coefficients としてまとめた。

Jean-Stefan Koskivirta 氏との共同研究において、 $G$ -zip のモジュライ空間上の法  $p$  保型形式の空間の Brylinski-Kostant フィルトレーションを用いた記述を与えた。当初は法  $p$  保型形式の空間はかなり複雑な構造で記述するのは難しいかと思われたが、Brylinski-Kostant フィルトレーションと関係していることがわかって研究が大きく進んだ。また  $G$ -zip のモジュライ空間上の保型ベクトル束の圏とある種の付加構造付きの加群の圏の間の圏同値を与えた。

さらに Hodge 型志村多様体上の旗空間上に部分 Hasse 不変量を構成し、その表現論的性質を調べた。特に部分 Hasse 不変量の高階の保型ベクトル束を用いた分解を与えた。

また全ての法  $p$  保型形式の weight で生成される錘が部分 Hasse 不変量の weight で生成されることをとある条件の下で証明した。

これらの結果については、三つの論文 Automorphic vector bundles on the stack of  $G$ -zips, Partial Hasse invariants for Shimura varieties of Hodge-type, Weights of mod  $p$  automorphic forms and partial Hasse invariants としてまとめた。

Maria Fox 氏との共同研究において、 $GU(2, n-2)$  の志村多様体の惰性的素点における還元の特異部分について調べた。より具体的には超特異部分の既約成分を完全化を取ったのちに Deligne-Lusztig 多様体上の旗スキームの閉部分スキームとして実現し、既約成分の交差について調べた。既約成分の交差には、従来の研究では見られないような Deligne-Lusztig 多様体の新しいストラティフィケーションが現れることがわかった。この結果については、The supersingular locus of the Shimura variety of  $GU(2, n-2)$  にまとめた。

局所 Langlands 対応の幾何化に関連して、局所 Langlands パラメータのモジュライ空間に関

する研究を行った。特に Alexander Bertoloni Meli 氏と Alex Youcis 氏との共同研究において、 $SL(2)$  型の Langlands パラメータのモジュライ空間を構成し、その空間から Weil-Deligne Langlands パラメータのモジュライ空間への Jacobson-Morozov 射を構成した。さらに、Jacobson-Morozov 射が離散的 Langlands パラメータのモジュライの上で同型を与えることを示した。この結果は、論文 The Jacobson-Morozov morphism for Langlands parameters in the relative setting としてまとめた。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Naoki Imai and Takahiro Tsushima	4. 巻 380
2. 論文標題 Affinoids in the Lubin-Tate perfectoid space and simple supercuspidal representations II: wild case	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Math. Ann.	6. 最初と最後の頁 751-788
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00208-020-02106-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Naoki Imai and Jean-Stefan Koskivirta	4. 巻 9
2. 論文標題 Automorphic vector bundles on the stack of G-zips	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Forum Math. Sigma	6. 最初と最後の頁 31 pp
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1017/fms.2021.32	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Naoki Imai and Takahiro Tsushima	4. 巻 58
2. 論文標題 Local Jacquet-Langlands correspondences for simple supercuspidal representations	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Kyoto J. Math.	6. 最初と最後の頁 623-638
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計4件（うち招待講演 4件/うち国際学会 4件）

1. 発表者名 Naoki Imai
2. 発表標題 Deligne-Lusztig stack
3. 学会等名 International Conference on Arithmetic Geometry, In honor of Michael Rapoport's 71st birthday（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naoki Imai
2. 発表標題 Langlands functoriality in the geometrization of the local Langlands correspondence
3. 学会等名 New Developments in Representation Theory of p-adic Groups, Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naoki Imai
2. 発表標題 Convolution morphisms, geometric Satake equivalence and Kottwitz conjecture
3. 学会等名 The conference on the Legacy of Elie Cartan, Tsinghua Sanya International Mathematics Forum (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Naoki Imai
2. 発表標題 The supersingular locus of the Shimura variety of $GU(2, n-2)$
3. 学会等名 30e Rencontres arithmetiques de Caen (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	University of Oregon	University of Michigan		