

令和 6 年 5 月 20 日現在

機関番号：14501

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18H01113

研究課題名（和文）接続層と複体のモジュライの研究

研究課題名（英文）Moduli of coherent sheaves and complexes

研究代表者

吉岡 康太 (Yoshioka, Kota)

神戸大学・理学研究科・教授

研究者番号：40274047

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 10,900,000円

研究成果の概要（和文）：Enriques曲面上の安定層のモジュライ空間について双有理幾何を調べた。特に奇数階数の向井ベクトルに対し、モジュライ空間がHilbertスキームと双有理同型であることを示した。K3曲面上の安定層のモジュライについて、ピカル数が1の場合にweak Brill-Noether性について研究をおこなった。アーベル曲面の導来圏の場合に、圏同値を含むある種のendofunctorの族に対し圏論的エントロピーを調べた。特に菊田と高橋の予想をこの場合に確かめた。ピカル数1のアーベル曲面に対し、generalized Kummer多様体の双有理自己同型群を調べた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

安定層やそのモジュライは微分幾何やYang-Mills理論（インスタントン）と関係し、様々な立場から研究がなされてきた。特に標準束が自明あるいはそれに近い場合、モジュライ空間の標準束も自明あるいはそれに近くなり代数幾何学的に興味深い構造を持っている。この研究ではEnriques曲面や楕円曲面上のモジュライについての双有理同型類、genericな安定層のコホモロジー群の挙動、圏論的エントロピーなどについて成果を得ることができた。

研究成果の概要（英文）：I studied the birational geometry of stable sheaves on Enriques surfaces. In particular, with Howard Nuer, I proved that the moduli of odd rank stable sheaves is birationally equivalent to the Hilbert scheme of points. For the moduli of stable sheaves on a K3 surface with the Picard rank 1, I studied weak Brill-Noether property. This is a joint work with Izzet Coskun and Howard Nuer. For the derived category of an abelian surface, I calculated the categorical entropy of some endofunctor. In particular I confirmed a conjecture of Kikuta and Takahashi in this case. I also studied the birational automorphism group of a generalized Kummer variety.

研究分野：代数幾何

キーワード：K3曲面、Enriques曲面 アーベル曲面 Brill-Noether 安定層

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

安定層やそのモジュライ空間を研究するのに、しばしば安定層のコホモロジー群を計算することが必要となる。これまでの研究でモジュライ空間の変形同値類などの位相的性質が調べられてきたが、モジュライ空間を調べるのに必要な最小限のことしかわかっていなかった。

Enriques 曲面上の安定層については、存在条件、モジュライ空間の既約性などについては研究されていた。一方双有理同値類については研究途上であった。

K3 曲面、アーベル曲面上の安定層のモジュライ空間については、ボゴモロフ分解とボゴモロフ因子として現れる既約シンプレクティック多様体の Nef 錐、Movable 錐が向井格子を使って記述されていた。しかしながら錐の形が一般には複雑なため、代数幾何学的性質を理解するのに不十分であった。

楕円曲面上の安定層のモジュライ空間については、Bridgeland が楕円ファイバー構造に付随した相対的フーリエ向井変換を構成し、その応用としてある不変量をもつ安定層のモジュライ空間が階数 1 の安定層のモジュライ空間(したがって曲面の対称積とピカール多様体の積)と双有理同値であることを示した。一方 Bridgeland の方法には楕円曲面に可約ファイバーが存在する場合、フーリエ向井変換の取り方に不明瞭な議論があった。

2. 研究の目的

K3 曲面、アーベル曲面、Enriques 曲面、楕円曲面上の安定層のモジュライ空間の双有理幾何的性質など代数幾何学的性質を調べる。またモジュライ空間のより深い理解と応用のため、曲面上の安定層のコホモロジー群の挙動 (Brill-Noether 軌跡) を調べる。

3. 研究の方法

研究会やメール等による研究連絡、パソコンを利用した数値実験、文献の購入

4. 研究成果

Enriques 曲面上の安定層のモジュライ空間の研究：

Enriques 曲面上の安定層のモジュライ空間について、イリノイ大学シカゴ校 (UIC) の Howard Nuer と双有理幾何を調べた。Enriques 曲面はピカール数が 10 と大きいので、大変多くの導来圏の自己同値がある。とくに階数が奇数の場合はこの作用により、階数 1 の Bridgeland 安定な複体に移ることが分かっている。安定複体と安定層のモジュライ空間は Bridgeland 安定性の空間における異なる点に対応する。モジュライ空間の位相的不変量を計算するのと異なり、代数幾何学的性質を調べるには、Bridgeland 安定性の空間における wall/chamber 構造の解析、特に wall に隣接する chamber に対し、モジュライ空間の間の関係を調べることが必要である。そのため安定条件が wall 上にあるあるとき、properly 半安定対象がなす部分スタックの次元評価が必要になる。以前算術的手法でこのような評価を得ていたが幾何学的手法(より自然な方法)で評価式を導き直した。Enriques 曲面の導来圏には(-1)対象が必ず存在し、nodal Enriques 曲面については、(-2)対象も存在する。K3 曲面上の安定複体のモジュライ空間について、Bayer-Macri は複数の(-2)対象が定める wall が鏡映関手によるフーリエ向井変換を使って解析できること、特に双有理同型が構成できることを示している。この結果を詳しく調べ、双有理対応を精密化し、また(-1)対象と(-2)対応が定める wall や複数の(-1)対象が定める wall の場合に一般化した。特に双有理同型を導くフーリエ向井変換が存在することを示した。ピカール群の記述のためには、余次元 2 を除いて双有理変換をフーリエ向井変換で記述することが必要となる。very general な Enriques 曲面の場合(つまり被覆 K3 曲面のピカール数が 10 の場合)には、これが可能であることを示せた。その応用として奇数階数などの場合にモジュライ空間のピカール群を行列式直線束を使って記述することができた。

安定層に関する Brill-Noether 軌跡の研究：

K3 曲面上の安定層のモジュライ空間の Brill-Noether 軌跡の研究

標準束が数値的自明な曲面上の安定層は、次数が正の場合セール双対性により第 2 コホモロジー群が消える。したがって曲線上の直線束のようにモジュライ空間において Brill-Noether 軌跡を考えることができる。本研究ではイリノイ大学シカゴ校の Izzet Coskun、イスラエル工科大の Howard Nuer と共同で K3 曲面上の安定層のモジュライについて、ピカール数が 1 の場合に Brill-Noether 軌跡を調べた。特にその上の一般の安定層のコホモロジー群が Riemann-Roch 定理によって期待される挙動を持つこと (weak Brill-Noether 性) について研究をおこなった。方法は Bridgeland の安定性条件の空間の wall/chamber 構造を利用するもので、一般的な結果と階数 20 以下の具体的な計算結果に分かれる。一般的な結果としては、 $n=(H^2)/2$ が $n>2r$ を満たすとき、対角線集合のイデアル層を核とするフーリエ向井変換で、モジュライ空間の一般元について安定性が保たれること、 $n+1>r$ を満たすとき weak Brill-Noether 性が成り立つことを示した。具体的な計算結果としては、階数 20 以下で weak Brill-Noether 性が成り立たないモジュライ空間のリストを作り上げた。

ピカール数 1 のアーベル曲面上の算術的 Cohen-Macaulay ベクトル束の研究：

算術的 Cohen-Macaulay ベクトル束や Ulrich ベクトル束を構成した。Neron-Severi 群が 1 元生成であるような偏極アーベル曲面 (X, H) に対しては、その上の一般の安定層のコホモロジー群が Riemann-Roch 定理によって期待される挙動、すなわち weak Brill-Noether 性を満たすことは古典的手法により以前から示されていた。この結果をつかって、算術的 Cohen-Macaulay ベクトル束 (aCM ベクトル束) すなわち第一コホモロジーが消えるベクトル束のうち、安定性を満たすものが存在するための条件を向井ベクトルを使って記述した。特に特別な aCM ベクトル束である Ulrich ベクトル束の存在性は Beauville により得られていたが、ピカール数 1 の場合にその別証明を与えた。さらに weak Brill-Noether 性の結果を Bridgeland 安定性条件の空間における wall 構造の問題としてとらえ、別証明も得た。安定でない aCM ベクトル束についても階数 2 の場合に分類したが、それによると aCM 性と安定性はあまり相性が良くないようである。安定でない aCM ベクトル束の分類は今後の課題である。

圏論的エントロピーの研究：

Dimitrov, Haiden, Katzarkov, Kontsevich は split generator をもつ三角圏の endofunctor に対し、その複雑さを測る不変量を定義した。菊田と高橋はこの不変量の特殊値とスペクトル半径の間の予想を提唱し、代数多様体の全射自己準同型写像の場合や代数曲線の導来圏の圏同値について、予想を確かめていた。本研究ではアーベル曲面の導来圏の場合に、圏同値を含むある種の endofunctor の族に対し圏論的エントロピーを調べた。

- (1) ピカール数が 1 のアーベル曲面については、向井格子への endofunctor の作用を 2 次行列により記述し、圏論的エントロピーを計算した。2 次行列の固有値が実数の場合は、行列の Jordan 標準形を利用して計算し、固有値が実数でない場合、特に偏角が無理数の場合の計算には Weyl の equidistribution theorem を使って計算した。
- (2) すべてのアーベル曲面のフーリエ向井変換 (圏同値) について、コホモロジー群の次元評価と池田による一般的な不等式により、菊田と高橋の予想を確かめた。
- (3) アーベル曲面の圏同値が、安定層のモジュライ空間から得られる既約シンプレクティック多様体の同型写像を誘導する場合、自己同型のエントロピーを圏論的エントロピーで記述した。

Generalized Kummer 多様体の研究：

既約シンプレクティック多様体の 2 大系列の一つである Generalized Kummer 多様体は、アーベル曲面上の点のヒルベルトスキームのボゴモロフ分解成分として得られる。これらの多様体について、アーベル曲面のピカール数が 1 の場合に双有理自己同型や正則自己同型群を計算した。また双有理自己同型がシンプレクティック自己同型かどうかについても調べた。6 次元以下の場合に自己同型が存在せず、また 8 次元の場合に位数 2 の自己同型写像が存在することを示した。双有理自己同型を調べるためには、Generalized Kummer 多様体のアーベル曲面への依存性を調べる必要がある。並河はアーベル曲面とその双対アーベル曲面の 4 次元 generalized Kummer 多様体が第 2 コホモロジー群は Hodge 構造込みで同型だが双有理同値でないことを示した。この結果は森章により一般化されていて、そのおかげで双有理同型類が決定できた。

双有理同型類と第 2 コホモロジー群の関係は大域的トレリ問題に他ならない。フーリエ向井変換による双有理同型の構成は以前の研究で分かっている。モノドロミー群の作用は Markman, Mongardi により決定された。モノドロミー群の作用とフーリエ向井変換の関係を調べることににより、双有理同値性と第 2 コホモロジー群の同型類の関係を明らかにした。特にピカール数が 1 の主偏極アーベル曲面上の安定層のモジュライ空間に関し、双有理同値性を向井ベクトルが定める 2 次形式の同値類として記述した。これは 1980 年代初めに向井により予想された主張を確かめたことになる。

楕円曲面上の安定層のモジュライの研究：

Bridgeland は楕円曲面上の安定層のモジュライ空間を楕円ファイバー構造に付随したフーリエ向井変換を構成することにより研究した。特に階数と第一チャーン類に関係するある種の条件のもと、安定層のモジュライ空間が (別の) 楕円曲面のヒルベルトスキームと双有理同値であることを示した。実は Bridgeland の議論では楕円ファイバー構造のすべてのファイバーの既約性が必要であったが、この仮定を取り除くことに成功した。またトーションをもつ接続層が安定となるような新しい安定性条件を導入した。さらに相対的フーリエ向井変換でこの安定性が閉じていることを示した。

半安定な楕円線織面上の 1 次元安定層のモジュライ空間について、ホッジ数の母関数を計算し、テータ関数の公式を使い積表示を与えた。線織面上の階数 2 の安定層のモジュライ空間のホッジ数は線織面構造と壁超え公式を使って計算できる。半安定な楕円線織面には楕円ファイバー構造があるので、相対的フーリエ向井変換を用いて 1 次元層のモジュライ空間に関する結果を得た。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 2件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Coskun Izzet, Nuer Howard, Yoshioka Kota	4. 巻 426
2. 論文標題 The cohomology of the general stable sheaf on a K3 surface	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 無し
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1016/j.aim.2023.109102	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Yoshioka Kota	4. 巻 217
2. 論文標題 Some moduli spaces of 1-dimensional sheaves on an elliptic ruled surface	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Geometriae Dedicata	6. 最初と最後の頁 無し
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10711-023-00801-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yoshioka Kota	4. 巻 173
2. 論文標題 Birational automorphisms groups of a generalized Kummer manifold for an abelian surface with Picard number 1	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 manuscripta mathematica	6. 最初と最後の頁 727 ~ 751
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00229-023-01472-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Yoshioka Kota	4. 巻 306
2. 論文標題 Wall crossing for moduli of stable sheaves on an elliptic surface	5. 発行年 2024年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 無し
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00209-023-03410-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Akira Mori and Kota Yoshioka	4. 巻 45
2. 論文標題 Moduli of Stable Sheaves on a K3 Surface of Picard Number 1	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Tokyo Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 263--298
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3836/tjm/1502179369	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Nuer, Howard, Yoshioka, Kota	4. 巻 372
2. 論文標題 MMP via wall-crossing for moduli spaces of stable sheaves on an Enriques surface	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Adv. Math.	6. 最初と最後の頁 119p
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Yoshioka Kota	4. 巻 116
2. 論文標題 aCM bundles on a general abelian surface	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Archiv der Mathematik	6. 最初と最後の頁 529--539
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kota Yoshioka	4. 巻 556
2. 論文標題 Categorical entropy for Fourier-Mukai transforms on generic abelian surfaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 J. Algebra	6. 最初と最後の頁 448-446
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jalgebra.2020.03.019	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計6件（うち招待講演 6件 / うち国際学会 6件）

1. 発表者名 Yoshioka Kota
2. 発表標題 Moduli of stable sheaves on an elliptic surface
3. 学会等名 Gauge Theory, Moduli Spaces and Representation Theory, Kyoto 2023. In honor of the 60th birthday of Hiraku Nakajima (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Yoshioka Kota
2. 発表標題 Moduli of stable sheaves on an elliptic surface
3. 学会等名 Workshop in honour of Lothar Goettsche's 60th birthday, 13-16 December 2021, (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yoshioka Kota
2. 発表標題 Moduli of stable sheaves on an abelian surface
3. 学会等名 Japanese-European Symposium on symplectic varieties and moduli spaces, 14--18, March 2022, 早稲田大学理工学部 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Kota Yoshioka
2. 発表標題 Weak Brill-Noether for the moduli of stable sheaves on a generic K3 surface
3. 学会等名 fourth Japanese-European Symposium on Symplectic Varieties and Moduli Spaces (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kota Yoshioka
2. 発表標題 Moduli of stable sheaves on Enriques surfaces
3. 学会等名 School and Workshop on Gauge Theories and Differential Invariants (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kota Yoshioka
2. 発表標題 Weak Brill-Noether for the moduli of stable sheaves on a generic K3 surface
3. 学会等名 Categorical and Analytic Invariants in Algebraic Geometry VII (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
米国	イリノイ大学シカゴ校			
イスラエル	イスラエル工科大学			