

令和 6 年 6 月 10 日現在

機関番号：34310

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18H01114

研究課題名(和文) Berkovich 解析空間とトロピカル幾何，代数・数論力学系の展開

研究課題名(英文) Berkovich analytic space, tropical geometry, and algebraic/arithmetic dynamics

研究代表者

川口 周 (Kawaguchi, Shu)

同志社大学・理工学部・教授

研究者番号：20324600

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 8,900,000円

研究成果の概要(和文)：非アルキメデス付値体上の代数多様体に付随する解析空間には多面体的多様体(トロピカル多様体)が埋め込まれており，代数多様体の重要な情報を保持していると考えられる，研究分担者の山木吉彦氏と，直線束の完備線形系に関するトロピカル化の忠実性を調べた．出版された論文は曲線と一般次元の代数多様体のものである．この方向で，トロピカルトーリック多様体とアーベル多様体の場合に詳しく調べた．代数・数論力学系では，Liang-Chung Hsia 氏と Henon写像の族に対して周期点の振る舞いを調べた．吉川謙一氏と向井茂氏と楕円関数の差とポチャードのPhi関数の明示的な関係を与えた．

研究成果の学術的意義や社会的意義

代数幾何で多項式の共通零点で表される図形である代数多様体を扱う．一方，トロピカル幾何は，代数幾何，数論幾何，組合せ論，数理物理など多くの分野とかがわっている．代数多様体が非アルキメデス付値体で定義された場合，直線束の切断の付値写像により多面体的多様体ができる一方，代数多様体の付値環上のモデルにより付随する解析空間にも多面体的多様体ができる．大雑把に言って，両者が一致するときに，トロピカル化は忠実とよばれ，多くの研究がされている．本研究では，直線束に付随する忠実トロピカル化がいつできるかを，曲線の場合と一般の代数多様体の場合，さらにトーリック多様体とアーベル多様体のときに詳しく調べている．

研究成果の概要(英文)：To an algebraic variety defined over a complete non-Archimedean value field, one can attach an analytic space in the sense of Berkovich. Fixing a model over the valuation ring, this analytic space contains a polyhedral complex, called the skeleton associated with the model, which preserves important information about the original variety. With Kazuhiko Yamaki, we have studied faithful tropicalizations associated to the linear system of a divisor. The published papers treat the case of curves and adjoint bundles on smooth projective varieties. In this direction, we study the cases of tropical toric varieties and tropical abelian varieties. In algebraic/arithmetic dynamics, with Liang-Chung Hsia, we study when two sections of a one-parameter family of Henon maps have infinitely many points over which the sections give periodic points. With Shigeru Mukai and Ken-Ichi Yoshikawa, we study explicit relations of the difference of elliptic j -functions and Borcherd's Φ function.

研究分野：代数幾何

キーワード：Berkovich 解析空間 トロピカル幾何 代数・数論力学系

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

(1) 非アルキメデス付値体上の射影代数多様体について、二種類のトロピカル化を考えることができる。一つは射影空間への写像を考えて付値写像の像の閉包をとるもの、もう一つは付値環上のモデルから定まる Berkovich 解析空間内のスケルトン(多面的多様体)である。両者の関係は、忠実トロピカル化問題とよばれ多くの研究がされている。

(2) 代数多様体の自己写像の反復合成に関する性質は、離散時間の力学系と考えられる。この力学系の代数的、数論的性質を調べるものは代数・数論力学系とよばれ、多くの研究がされている。

(3) ボチャードの Phi 関数はエンリケス曲面上のモジュライ空間上の判別式軌跡を特徴づける保型形式である。エンリケス曲面は、 $K3$ 曲面の自由な対合射による商で得ることができる。吉川によって、 $K3$ 曲面と対合射から定まる解析的トーシオンを用いて、ボチャードの Phi 関数が構成できることが示されている。

2. 研究の目的

(1) 射影代数多様体から射影空間への写像を得る一般的な方法は、射影代数多様体上の直線束をとり、その直線束の大域切断が定める射影空間への有理写像を考えるものである。いくつかの射影代数多様体に対して、直線束に付随した射影空間への写像によるトロピカル化が、直線束にどのような条件のもとで忠実になるかを明らかにする。

(2) 力学系では、自己写像の反復合成に関する性質を調べるものと、自己写像のパラメータ付けされた族を考え、パラメータの値によって自己写像の反復合成の性質がどう変わるかを調べるものがある。ここでは、1 変数のパラメータ付けされた Henon 写像に関する代数的、数論的な性質を調べる。

(3) ボチャードの Phi 関数の代数的な表示とそれを用いて楕円 j 関数との関係を調べる。また、Eisenstein $K3$ 曲面から定まる解析的トーシオンを構成する。

3. 研究の方法

(1) 射影代数曲線の場合は、曲線の種数を g とするとき、直線束の次数が $2g+1$ 以上であれば、直線束は非常に豊富になり、大域切断によって射影代数曲線を射影空間に埋め込むことができる。高次元の射影代数多様体の場合は、埋め込みや大域生成については、adjoint 直線束が、曲線の場合の直線束に対応することが多い。アーベル多様体のときは、アーベル多様体の次元を g とし、直線束の偏極を (d_1, \dots, d_g) とするとき、 d_1 が 3 以上であれば非常に豊富になる。トーリック多様体のときも、直線束がいつ非常に豊富になるかが調べられている。これらの場合について、忠実トロピカル化がどのようになるかを、Berkovich 解析空間やトロピカル多様体の手法を用いて調べていく。

(2) パラメータ付けされた 1 変数多項式の場合に、点が周期点になるようなパラメータの値については、Baker-DeMarco や Ghioca-Hsia-Tucker 達によって調べられている。また、Hennon 写像の p 進的 Green 関数なども存在する。1 変数多項式の場合の手法と、Hennon 写像の p 進的 Green 関数などを用いる。

(3) 5 次元射影空間の 3 つの 2 次多項式の共通零点で与えられる $K3$ 曲面を考え、それによってエンリケス曲面の定義多項式を考える。また、Eisenstein $K3$ 曲面のモジュライについては、Artebani, Sarti, Taki などによって調べられている。これらを用いる。

4. 研究成果

(1) 忠実トロピカル化

出版された論文は、研究分担者の山木壱彦氏との共同研究である。射影代数曲線の場合と一般次元の代数多様体で忠実トロピカル化を調べた。

射影代数曲線の場合は、曲線は非自明な非アルキメデス付値の入った完備代数的閉体 K 上で定義されているとする。このとき、代数曲線上に直線束を考える。直線束の次数が $3g-1$ 以上であれば、射影代数曲線の狭義の半安定モデルから定まる Berkovich 解析空間内の（無限辺も許した）スケルトンが、直線束の大域切断によって忠実トロピカル化されることを示した。さらに、このことを用いて、トロピカル化の極限として Berkovich 空間が得られるという Payne の結果の次数をおさえた版を示した。

高次元の場合は、 K を標数 0 の等標数の離散付値体とし、 K 上で定義された滑らかな射影代数多様体 X と、その上の豊富な直線束 L を考える。付値環上で regular な狭義の半安定モデルをもち、 L はモデル上の相対的に豊富な直線束に持ち上ることを仮定する。また、一般に、標数 0 の体上に定義された代数多様体の豊富な直線束の m 乗に標準束をテンソルした adjoint 直線束が自由になるような m をとる。このとき、 L の m 乗に標準束をテンソルした adjoint 直線束の大域切断で、このモデルに関するスケルトンが忠実トロピカル化されることを示した。

アーベル多様体のときは、アーベル多様体の次元を g とし、直線束の偏極を (d_1, \dots, d_g) とする。 K は非自明な非アルキメデス付値の入った完備代数的閉体として、 K 上で定義されたアーベル多様体を考える。このとき、研究分担者の山本彦彦氏との共同研究で、アーベル多様体に付随する Berkovich 解析空間には、自然なスケルトンが定まる。このとき、 g のみによる定数 $N(g)$ が存在して、 d_1 が $N(g)$ 以上であれば、アーベル多様体の直線束の大域切断で、忠実トロピカル化ができることが分かった。トロピカル・アーベル多様体のときには、トロピカル直線束による忠実埋め込みについても同様にことが分かった。さらに、アーベル多様体の次元が 2 のときには、 $N(2)$ として、3 がとれることも分かった。

トーリック多様体の場合は、トーリック多様体上の直線束がいつ豊富であるか、あるいは非常に豊富であるかは、対応する扇の情報で記述することができる。すでに、曲線の場合でも、非常に豊富であっても忠実埋め込みを与えない直線束が存在することが分かったが、研究分担者の山本彦彦氏との共同研究で、トーリック多様体の場合にも、非常に豊富であっても忠実埋め込みを与えない直線束が存在することが分かった。

(2) 数論力学系

Liang-Chung Hsia 氏との共同研究で、1 変数のパラメータ付けされた Henon 写像を考え、点が Henon 写像によって周期点になるようなパラメータの値を、 p 進グリーン関数を用いて特徴付け付けた。さらに、 p 進グリーン関数などを用いて、2 つの点が Henon 写像によってどちらも周期点になるようなパラメータが存在するかなどを調べた。

(3) 解析的トーション

出版された論文は、吉川謙一氏と向井茂氏との共同研究である。ポチャードの Φ 関数はエンリケス曲面上のモジュライ空間上の判別式軌跡を特徴づける保型形式である。この論文では、ポチャードの Φ 関数を代数的な公式を与えた。

5 次元射影空間の中で x_1, x_2, x_3 だけの 2 次多項式 f_1, g_1, h_1 と x_4, x_5, x_6 だけの 2 次多項式 f_2, g_2, h_2 を考え、 $f = f_1 + f_2, g = g_1 + g_2, h = h_1 + h_2$ とおく。3 つの 2 次多項式 f, g, h の共通零点は K_3 曲面になる。この K_3 曲面には自然な対合射が考えられ、その商はエンリケス曲面になる。ポチャードの Φ 関数のこのエンリケス曲面での値を、 f, g, h の一部の多項式の終結式を用いて明示的に表した。

さらに、吉川謙一氏と向井茂氏との共同研究で、楕円 j 関数の差とポチャードの Φ 関数を結びつける公式を与えた。二つの楕円曲線が与えられたとき、その直積に付随する Kummer 曲面を考える。この Kummer 曲面には 15 個の対合射が考えられ、15 個のエンリケス曲面ができる。上のポチャードの Φ 関数を代数的な公式を用いて、与えられた二つの楕円曲線の周期の j 関数の値の差と、ポチャードの Φ 関数の 15 個のエンリケス曲面での値を結びつけた。

吉川謙一氏との共同研究で、Eisenstein K_3 曲面から定まる解析的トーションから Eisenstein K_3 曲面のモジュライ空間上の保型形式の構成の研究を進めた。Eisenstein K_3 曲面のモジュライは複素球の商なので、ユニタリ型の保型形式になる。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計3件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 Kawaguchi Shu, Yamaki Kazuhiko	4. 巻 270
2. 論文標題 Effective faithful tropicalizations associated to linear systems on curves	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Memoirs of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 1-110
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1090/MEMO/1323	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kawaguchi Shu, Yamaki Kazuhiko	4. 巻 2019
2. 論文標題 Effective Faithful Tropicalizations Associated to Adjoint Linear Systems	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 6089-6112
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1093/imrn/rnx302	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Shu Kawaguchi, Shigeru Mukai, Ken-Ichi Yoshikawa	4. 巻 140
2. 論文標題 Resultants and the Borcherds Phi-Function	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 American Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1471-1519
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1353/ajm.2018.0045	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 7件/うち国際学会 4件）

1. 発表者名 Shu Kawaguchi
2. 発表標題 j-invariant and Borcherds Phi-function
3. 学会等名 Recent Developments in Algebraic Geometry, Arithmetic and Dynamics Part 1, National University of Singapore（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 川口 周
2. 発表標題 Andre-Oort予想の最近の進展 (企画サーベイ)
3. 学会等名 代数幾何学城崎シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 川口 周
2. 発表標題 直線束に付随した忠実トロピカル化とトロピカル多様体の忠実埋め込み
3. 学会等名 2022早稲田整数論研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 川口周
2. 発表標題 数論力学系における高さ関数
3. 学会等名 日本数学会2021年度年会 企画特別講演 (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Shu Kawaguchi
2. 発表標題 j-invariant and Borcherds Phi-function
3. 学会等名 Number Theory Seminar, Cambridge University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shu Kawaguchi
2. 発表標題 Some arithmetic properties of one-parameter families of Henon maps
3. 学会等名 Vietnam-USA Joint Mathematical Meeting, Special Session on Complex Geometry and Dynamical Systems (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Shu Kawaguchi
2. 発表標題 Heights and periodic points for one-parameter families of Henon maps
3. 学会等名 Intercity Seminar on Arakelov Geometry 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 Hideaki Ikoma, Shu Kawaguchi, Atsushi Moriwaki	4. 発行年 2022年
2. 出版社 Cambridge University Press	5. 総ページ数 169
3. 書名 The Mordell conjecture : a complete proof from Diophantine geometry	

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分担者	山木 吉彦 (Yamaki Kazuhiko) (80402973)	筑波大学・数理物質系・教授 (12102)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

国際研究集会 Arithmetic algebraic geometry and mathematical physics	開催年 2021年～2021年
国際研究集会 Workshop on Nonarchimedean Geometry and Related Fields	開催年 2024年～2024年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------