

令和 5 年 5 月 30 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18H01115

研究課題名(和文) 超平面配置および関連する滑層空間の離散構造を使った明示的研究

研究課題名(英文) Explicit study of hyperplane arrangements and related stratified spaces via discrete structures

研究代表者

吉永 正彦 (Yoshinaga, Masahiko)

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：90467647

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 13,160,000円

研究成果の概要(和文)：超平面配置の代数的、位相的、組合せ論的側面に関する研究を行った。代数的側面については、分担者や協力者との共同研究に基づき、コクセター配置の重複度付きベクトル場の構造と、量子 Calogero-Moser系のquasi-invariantsの関係性を調べた。位相的側面に関しては、超平面配置の二重被覆の mod 2 Betti数の組合せ論的表示を得、ミルナーファイバーのベッチ数に関するPapadima-Suciuの予想の反例を得た。組合せ論的側面に関しては、G-Tutte多項式や特性準多項式など、数え上げ関数の基本的な性質を調べた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

超平面配置は様々な研究テーマとかがわっており、その研究は数学の様々な研究に影響がある。例えば本研究においてCalogero-Moser系のquasi-invariantsと超平面配置の対数的ベクトル場の対応が明らかになったが、この対応により双方向に知見の供給が可能になる。また、超平面配置は非孤立特異点を持った超曲面としても重要であり、そのミルナーファイバーやモノドロミー作用の研究は、今後の特異点の研究をリードすることが期待できる。

研究成果の概要(英文)：In this project, we studied algebraic/topological/combinatorial aspects of hyperplane arrangements. Based on joint works with T. Abe, N. Enomoto, M. Feigin, we find new connections between quasi-invariants in the theory of quantum Calogero-Moser system and the module of logarithmic vector fields with a multiplicity. This correspondence enables us to construct an explicit basis for Catalan arrangements for type A. In the topological aspects, we obtained a formula for the mod 2 Betti numbers of double coverings of hyperplane arrangement complements. Furthermore, we found that the icosidodecahedral arrangements breaks Papadima-Suciu's conjectural formula for the first Betti number of the Milnor fiber of arrangements. We also studied basic properties of characteristic quasi-polynomial and G-Tutte polynomial.

研究分野：数学

キーワード：超平面配置 ミルナーファイバー 数え上げ関数 対数的ベクトル場

1. 研究開始当初の背景

超平面配置はトポロジー、組み合わせ論、表現論、代数幾何など様々な分野に共通して現れる対象である。最近では数理論理学やトポロジカル幾何の影響を受けて、超平面配置の理論は発展している。数ある超平面配置の中でも、とりわけ、ルート系やコクセター群に関係した配置は、組みひも群の分類空間、様々な群の組合せ論的研究、数え上げ組合せ論の多くの問題とかがわっている。超平面配置の重要な側面として、滑層構造(ストラティフィケーション)があげられる。数え上げ組合せ論における多くの問題が、滑走構造と密接に関係しており、この対応を通して、数え上げ問題に対する(代数)幾何学的アプローチや、組合せ論的構造を援用した位相幾何的な研究が可能になる。例えばグラフの頂点彩色の数え上げに関する彩色多項式は、グラフから決まる超平面配置の特性多項式と解釈することができ、その係数に関する歴史的未解決問題が解決するなど、近年も活発に研究されている。

2. 研究の目的

本研究では、数え上げ組合せ論的現象を統制している様々な滑層空間の幾何学的不変量を「明示的」に記述することで、組み合わせ論的問題に対して幾何学的な側面から進展をもたらすことを目指している。特に、超平面配置に関連した滑層空間の幾何学的不変量の具体的な記述を行い、低次元トポロジー、可積分系などの分野から最近の知見やアイデアを導入することにより、数え上げ問題への応用を目指した、滑層空間の代数/幾何的な研究を展開することを目的としている。特に三つのテーマを、進展させるべき重要なテーマと位置づけている。

一つ目は、(1) コクセター配置の自由性や平坦構造の周辺についてである。ルート系に付随したカタラン配置などは組合せ論的観点から、また代数的観点から活発に研究されている。代数的観点からの研究においては「自由性」という概念が中心的なテーマとなる。その際に、寺尾の分解定理や様々な自由性の判定法が強力に機能し、過去20年で多くの成果が得られている。しかし一方では、上記の結果がブラックボックスとして機能してしまうため、美しい結果そのものを成り立たせる根本的原理を明らかにできているとは言い難い状況である。特にカタラン配置やシー配置の構造について代数的な観点から明示的な研究を進める必要がある。

二つ目は、(2) 超平面配置や部分空間配置のトポロジーに関する研究である。超平面配置の位相的不変量がどの程度組合せ論的構造から決定できるか?という問題は超平面配置のトポロジーにおける最重要問題で、特に局所係数コホモロジーや超平面配置やミルナーファイバーのコホモロジーの構造に関しては組合せ論的に決定できるのではないかと期待されている。これらは一次のベッチ数ですらまだ未解明であるが、Papadima と Suciu がミルナーファイバーの一次のベッチ数を組合せ論的に表示する予想を定式化しており、その成否を探ること、またこの予想と関連して未解明の一次のホモロジーのねじれについて明らかにすることが重要課題である。

三つ目は、(3) マトロイド、Tutte 多項式の一般化とその応用、である。整数環上定義された超平面配置に対して、特性多項式の一般化である「特性準多項式」が2007年に紙屋 - 竹村 - 寺尾により導入された。本研究の準備段階で、Liu 氏、Tran 氏との共同研究で、G-Tutte 多項式という概念を導入し、位相構造と数え上げ関数を結ぶ新しい枠組みの構築を目指した研究を開始している。G-Tutte 多項式の理論の整備・拡張、様々な数え上げ関数との関連を調べることで、G-Tutte 多項式を軸とした数え上げ関数の一般論の構築を目指す。

3. 研究の方法

上記の三つの問題設定ごとに述べる。(1) については、量子可積分系の知見を導入することで研究を進める。本研究の準備段階で M. Feigin 氏から、超平面配置の自由性の研究と、量子 Calogero-Moser 系に現れる “quasi-invariant” という概念が密接にかかわっているという指摘を受け、Feigin 氏、阿部拓郎氏、榎本直也氏、陶山大輔氏らと議論を始めている。例えば、量子可積分系側で知られている、quasi-invariant の積分表示に対応するものは、超平面配置側では明示的には知られておらず、逆に、超平面配置側で研究されているが、量子可積分系側では対応物がない場合もある。このように、両分野の関係を密に探ることで、大きく発展させることができる。(2) については、研究代表者がこれまで研究を進めてきた、実構造を使った極小セル分割の記述に基づいて、局所係数コホモロジーやミルナーファイバーの位相的構造の解明を行う。これまでに多くの実験的な計算を行っており、Papadima-Suciu の予想の証明と反例探しの両面から研究を行う。(3) については、G-Tutte 多項式の一般論の整備と応用に向けて、多面体の格子点理論(Ehrhart 理論)との関係を軸に研究を進める。G-Tutte 多項式のもととなった、

Moci 氏の算術 Tutte 多項式は、ゾノトープの Ehrhart 多項式と密接に関係しており、G-Tutte 多項式についても、Ehrhart 理論的な研究を進める。関連して、特性準多項式が持つ “GCD 性” という性質に注目し、Ehrhart 理論における GCD-性の研究や関連する組合せ論的問題を扱う。

コミュニティにおける最新知見の共有や多くの共同研究を進めるために、国際研究集会を Zoom ないし対面で実施する。情報収集と研究議論のために、離散幾何構造セミナーを随時開催する。

4. 研究成果

上記の 3 つのテーマそれぞれについて研究成果を述べる。

まず(1)に関しては、陶山大輔氏との共同研究で、A 型のカタラン配置とシー配置の対数的ベクトル場の基底の積分表示を得ることができた。先行研究では、A2 型や、限定された状況でしか構成されておらず、A 型で統一的な構成ができたことは大きな進展であると考えている。手法は、Calogero-Moser 系の quasi-invariant の積分表示の「離散版」を考えるとというもので、これまでなかった全く新しい構成法である。本成果はすでに専門誌上で発表されている。ほかに、阿部拓郎氏、G. Rohrle 氏、C. Stump 氏との共同研究で、well-generated な複素鏡映群に付随して、重複度付き対数的ベクトル場の基底を構成し、斎藤恭司氏の意味での原始微分や Hodge フィルトレーションを明示的に記述した。また阿部拓郎氏、榎本直也氏、M. Feigin 氏との共同研究で、Quasi-invariants の加群と重複度付き対数的ベクトル場の加群の対応関係を明らかにした。これらは論文としてまとめられ、現在専門誌に投稿中である。この他にも、阿部氏、榎本氏との共同研究で原始微分の離散化に関する研究が進展しつつあり、近い将来論文としてまとめ、発表できる見込みである。

(2)に関しては、三次元空間内の直線配置の補集合のトポロジーについて研究予定であったが、石川剛郎氏と学生の小山元希氏が stratified モース理論の応用として、ハンドル分解の構造を明らかにした。この成果は石川 - 小山氏により発表済みである。

テーマ(2)に関しては、ミルナーファイバーや二重被覆の位相的構造の研究に関して大きな進展があった。まず、中心的超平面配置のミルナーファイバーは、射影化した超平面配置の補集合の巡回被覆空間となっていることが以前から知られていた。本研究により、超平面配置の補集合の二重被覆の mod 2 ベッチ数が純組合せ論的に決定できることが分かった。二重被覆の transfer 長完全列を詳しく分析することで、その連結準同型が超平面配置の mod 2 青本複体の余境界写像と一致することが証明の鍵である。巡回被覆についてはこれまでも研究されてきたが、二重被覆に特化した研究がこれまでなかったためか、長らく見過ごされてきた事実である。次に、大きな成果として、20-18 面体配置の発見があげられる。20-12 面体と呼ばれる 12 枚の正 5 角形と 20 枚正三角形からなる多面体のいくつかの頂点を通るように 16 枚の平面を構成することができる。これを 20-12 面体配置と呼ぶ。これまでに得ていた、実構造を使った局所係数コホモロジーの計算と、上記の二重被覆の mod 2 青本複体の計算により、20-12 面体配置のミルナーファイバーの一次のコホモロジーが 2-torsion を持つことが分かった。さらに、この例で Papadima-Suciu によって予想された公式の不成立が確認された。Papadima-Suciu の予想は、2013 年ごろから専門家の間では知られ、非常に多くの非自明な例で確認されてきていたので、反例が見つかったことは大きな成果である。さらに、ミルナーファイバーの一次のコホモロジーがねじれを持つ例も 20 年近く探し求められてきたものであった。本研究はすでに専門誌に発表済みである。引き続き、大学院生の石橋卓氏と菅原朔見氏との共同研究で、二重被覆と局所係数コホモロジーの関係を詳細に調べた。その結果(ある意味で)「Papadima-Suciu の予想の反例」と「一次のコホモロジーの 2-torsion の存在」は同値であることがわかった。つまり、上記の例(20-12 面体配置)が二つの独立した問題に反例を与えていることは偶然ではなかったことが明らかになったといえる。この成果は石橋氏、菅原氏との共著論文として、現在専門誌に投稿中である。このプロセスで、菅原氏が Cohen-Dimca-Orlik の意味での非共鳴条件を満たす、階数 1 の整局所系に対して、そのコホモロジーの構造をねじれ部分まで含めて完全に決定した。これには実構造を使ったセル分割の記述が使われている。これらの研究に関連する研究が、Suciu, Maxim らにより行われている。

(2)に関連して、菅原氏と共同で、直線配置補集合のハンドル分解の研究を行った。直線配置補集合は実 4 次元多様体で、ホモトピー型としては 2 次元 CW 複体とホモトピー同地なので、そのハンドル分解は Kirby 図式というリンクを使って記述できることが一般論からわかるが、具体的な記述は未解明であった。ハンドルの貼りつき写像を、区分線形写像を使って記述することで、Kirby 図式のリンクの様子がわかり、さらにリンクを効率的に表示するために、「カスプ付きディバイド」という概念を導入した。「カスプ付きディバイド」は、二次元円盤上に描かれた曲線(自己交差やカスプがあってもよい)に対してリンクを対応させる概念で、直線配置補集合のハンドル分解を表す Kirby 図式のリンクはすべて「カスプ付きディバイド」であらわすことができることがわかった。本成果は菅原氏との共同研究として、専門誌で発表済みである。

(3)に関連して、古典的な Tutte 多項式や、特性準多項式、算術 Tutte 多項式を一般化する G-Tutte 多項式という概念が本研究の基礎であるが、G-Tutte 多項式を導入した論文が、本研究期

間中に出版された。引き続き、Tran 氏と共同研究を行い、特性多項式の構成素に関する研究を行った。特性準多項式は単純化すると、「構成素」と呼ばれるいくつかの多項式のリストであるが、その中で「素な構成素」が超平面配置の特性多項式と一致することは、特性準多項式の導入時から知られていた。上記の G-Tutte 多項式の論文で、「最も退化した構成素」が、トーラス上の部分トーラス配置の特性多項式と一致することが明らかにされたが、他の構成素については未解明であった。Tran 氏との共同研究で、他の構成素もトーラス配置の部分配置の特性多項式であることが明らかになった。関連する研究として、Ashraf 氏、Tran 氏との共同研究でルート系の「イデアル配置」と呼ばれる部分配置の特性準多項式の記述を得た。

超平面配置の特性準多項式は「周期的な多項式」とも呼ばれているように、代入する自然数 n について、代入すべき構成素が周期的に変わる数え上げ関数である。紙屋 - 竹村 - 寺尾による導入以来、その論文内で定義された LCM 周期と呼ばれる周期が最小周期になっているのはいか、と以前から予想されていた。東谷氏、Tran 氏との共同研究で、この予想を肯定的に解決した。本論文はすでに専門誌にアクセプトされている。

C. de Vries 氏との共同研究で、Ehrhart 準多項式がいつ GCD 性を持つか、という問題を扱った。この問題自体は一般的すぎるが、格子多面体を有理ベクトルで平行移動して得られる多面体に関しては、多面体の中心対称性や、Zonotope であることが、Ehrhart 準多項式の構成素の対称性と GCD 性と密接にかかわっていることが分かった。この成果は現在論文としてまとめ、投稿中である。

数え上げ組合せ論に関する問題として、学生の赤坂氏、石橋氏と Chip-firing game に関する研究を行った。有限グラフと、各頂点に正の整数 (chip) を割り当てると、firing という頂点の列の集合が得られる。これを、頂点を文字とする「語の集合」とみなすことができるが、fire する頂点が二頂点という非常に限定的な状況ではあるが、どのような語の集合が chip-firing game からきているのかを特徴づけた。本成果は専門誌に投稿しアクセプト済みである。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計12件（うち査読付論文 12件 / うち国際共著 3件 / うちオープンアクセス 2件）

1. 著者名 Yoshinaga Masahiko	4. 巻 6
2. 論文標題 Double coverings of arrangement complements and 2-torsion in Milnor fiber homology	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 European Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 1097 ~ 1109
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40879-019-00387-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Ashraf Ahmed Umer, Tran Tan Nhat, Yoshinaga Masahiko	4. 巻 120
2. 論文標題 Eulerian polynomials for subarrangements of Weyl arrangements	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Advances in Applied Mathematics	6. 最初と最後の頁 102064 ~ 102064
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aam.2020.102064	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Liu Ye, Tran Tan Nhat, Yoshinaga Masahiko	4. 巻 2021
2. 論文標題 G-Tutte Polynomials and Abelian Lie Group Arrangements	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 150 ~ 188
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnz092	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Kazuki Iijima, Kyouhei Sasaki, Yuuki Takahashi, Masahiko Yoshinaga	4. 巻 14
2. 論文標題 Eulerian polynomials and polynomial congruences	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Contributions to Discrete Mathematics	6. 最初と最後の頁 46-54
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.11575/cdm.v14i1.62485	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Tran Tan Nhat, Yoshinaga Masahiko	4. 巻 165
2. 論文標題 Combinatorics of certain abelian Lie group arrangements and chromatic quasi-polynomials	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Journal of Combinatorial Theory, Series A	6. 最初と最後の頁 258 ~ 272
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jcta.2019.02.003	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Masahiko Yoshinaga	4. 巻 157
2. 論文標題 Characteristic polynomials of Linial arrangements for exceptional root systems.	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Journal of Combinatorial Theory, Series A	6. 最初と最後の頁 267-286
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jcta.2018.02.011	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Hal Schenck, Hiroaki Terao, Masahiko Yoshinaga	4. 巻 25 vol. 6
2. 論文標題 Logarithmic vector fields for curve configurations in \mathbb{P}^2 with quasihomogeneous singularities.	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Mathematical Research Letters	6. 最初と最後の頁 1977-1992
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/MRL.2018.v25.n6.a14	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Suyama Daisuke, Wakkanai Hokusei Gakuen University, Japan, Yoshinaga Masahiko, Hokkaido University, Japan	4. 巻 17
2. 論文標題 The Primitive Derivation and Discrete Integrals	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 1-9
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2021.038	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Sugawara Sakumi, Yoshinaga Masahiko	4. 巻 313
2. 論文標題 Divides with cusps and Kirby diagrams for line arrangements	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Topology and its Applications	6. 最初と最後の頁 107989 ~ 107989
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.topol.2021.107989	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Tsukamoto Masaki, Tsutaya Mitsunobu, Yoshinaga Masahiko	4. 巻 251
2. 論文標題 G-index, topological dynamics and the marker property	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Israel Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 737 ~ 764
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11856-022-2433-0	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Higashitani Akihiro, Tran Tan Nhat, Yoshinaga Masahiko	4. 巻 2023
2. 論文標題 Period Collapse in Characteristic Quasi-Polynomials of Hyperplane Arrangements	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 International Mathematics Research Notices	6. 最初と最後の頁 8934 ~ 8963
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1093/imrn/rnac104	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Kentaro Akasaka, Suguru Ishibashi, Masahiko Yoshinaga,	4. 巻 -
2. 論文標題 Finite record sets of chip-firing games.	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Innovations in Incidence Geometry: Algebraic, Topological and Combinatorial	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

[学会発表] 計29件(うち招待講演 28件/うち国際学会 19件)

1. 発表者名 Masahiko Yoshinaga
2. 発表標題 A q-deformation of the Aomoto complex
3. 学会等名 Arrangements at Home II (Zoom meeting) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masahiko Yoshinaga
2. 発表標題 A q-deformation of the Aomoto complex
3. 学会等名 DMV Annual Meeting 2020 (TU Chemnitz), Sec04: Discrete Mathematics and Theoretical Computer Science, (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 Masahiko Yoshinaga
2. 発表標題 The primitive derivation and discrete integrals
3. 学会等名 Oberwolfach Workshop (Zoom) ``Logarithmic Vector Fields and Freeness of Divisors and Arrangements: New perspectives and applications'' (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masahiko Yoshinaga
2. 発表標題 The primitive derivation and discrete integrals
3. 学会等名 2020 OIST Workshop ``Quantum Math, Singularities and Applications'' (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Masahiko Yoshinaga
2. 発表標題 Enumerative aspects of G-Tutte polynomials
3. 学会等名 `New developments in matroid theory' at the SIAM - Conference on Applied Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masahiko Yoshinaga
2. 発表標題 Icosidodecahedron and Milnor fiber of arrangements
3. 学会等名 Hyperplane Arrangements in Wakkanai (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masahiko Yoshinaga
2. 発表標題 20・12面体と超平面配置のミルナーファイバー
3. 学会等名 離散数学とその応用研究集会2019 (JCCA 2019) (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masahiko Yoshinaga
2. 発表標題 Icosidodecahedron and Milnor fiber of arrangements
3. 学会等名 Workshop on Hyperplane Arrangements and Reflection Groups (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masahiko Yoshinaga
2. 発表標題 Icosidodecahedron and Milnor fiber of arrangements
3. 学会等名 ホモトピーシンポジウム2019 (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masahiko Yoshinaga
2. 発表標題 A new approach to the $K(\ , 1)$ problem for simplicial arrangements (work in progress)
3. 学会等名 Analytic and Categorical Invariants in Algebraic Geometry (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masahiko Yoshinaga
2. 発表標題 Icosidodecahedron and Milnor fiber of hyperplane arrangements
3. 学会等名 Hyperplane arrangements and Japanese-Australian Workshop on Real and Complex Singularities (HyperJARKS) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masahiko Yoshinaga
2. 発表標題 Icosidodecahedron and Milnor fiber of hyperplane arrangements
3. 学会等名 第15回代数・解析・幾何学セミナー (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 吉永正彦
2. 発表標題 特性多項式の零点分布からTutte多項式の一般化へ
3. 学会等名 北海道大学数学教室談話会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masahiko Yoshinaga
2. 発表標題 Introduction to Catalan arrangements. (3 hours lecturers)
3. 学会等名 SUMMER SCHOOL - NEW PERSPECTIVES IN HYPERPLANE ARRANGEMENTS (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masahiko Yoshinaga
2. 発表標題 G-Tutte polynomials and abelian Lie group arrangements.
3. 学会等名 The 6th Franco-Japanese-Vietnamese Symposium on Singularities, (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 吉永正彦
2. 発表標題 組合せ論的相互律とオイラー標数
3. 学会等名 東北大学代数幾何セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 吉永正彦
2. 発表標題 超平面配置と特性準多項式
3. 学会等名 名古屋工業大学談話会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masahiko Yoshinaga
2. 発表標題 Matroids, Tutte polynomial, and generalizations (3 hours lectures).
3. 学会等名 Free divisor and hyperplane arrangements, in Paris (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masahiko Yoshinaga
2. 発表標題 On free hyperplane arrangements and Terao's conjecture (6 hours lectures)
3. 学会等名 CIMPA - IMH Research School, HYPERPLANE ARRANGEMENTS: RECENT ADVANCES AND OPEN PROBLEMS. Hanoi (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Masahiko Yoshinaga
2. 発表標題 Double coverings of arrangement complement and 2-torsion in Milnor fiber homology.
3. 学会等名 Workshop in CIMPA - IMH Research School, HYPERPLANE ARRANGEMENTS: RECENT ADVANCES AND OPEN PROBLEMS, Hanoi, (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 吉永正彦
2. 発表標題 数え上げ関数から見た空間の形
3. 学会等名 第19回岡シンポジウム (Zoom) (招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 吉永正彦
2. 発表標題 超平面配置の特性準多項式
3. 学会等名 東京名古屋代数セミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masahiko Yoshinaga
2. 発表標題 Vassiliev filtration and Varchenko-Gelfand filtration
3. 学会等名 Japan-Vietnam Singularity Seminar, (Zoom) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 吉永正彦
2. 発表標題 Milnor fibers of hyperplane arrangements.
3. 学会等名 トポロジー火曜セミナー, 東京大学 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masahiko Yoshinaga
2. 発表標題 Characteristic quasi-polynomials of hyperplane arrangements and Ehrhart quasi-polynomials.
3. 学会等名 Research on finite groups, algebraic combinatorics, and vertex algebras, RIMS 京都大学 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Masahiko Yoshinaga
2. 発表標題 The primitive difference operator
3. 学会等名 Combinatorics, geometry and commutative algebra of hyperplane arrangements, 九州大学 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masahiko Yoshinaga
2. 発表標題 Ehrhart quasi-polynomials and Characteristic quasi-polynomials
3. 学会等名 Characteristic Polynomials of Hyperplane Arrangements and Ehrhart Polynomials of Convex Polytopes. RIMS, Kyoto University (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masahiko Yoshinaga
2. 発表標題 Old and new results on Catalan arrangements
3. 学会等名 Real, Complex, and Symplectic Reflection Groups (Spring School) (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 Masahiko Yoshinaga
2. 発表標題 Edelman-Reiner conjecture revisited
3. 学会等名 Various Guises of Reflection Arrangements, ICMS (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2023年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	阿部 拓郎 (Abe Takuro) (50435971)	九州大学・マス・フォア・インダストリ研究所・教授 (17102)	
研究分担者	島田 伊知朗 (Shimada Ichiro) (10235616)	広島大学・先進理工系科学研究科(理)・教授 (15401)	
研究分担者	徳永 浩雄 (Tokunaga Hiroo) (30211395)	東京都立大学・理学研究科・教授 (22604)	
研究分担者	長谷部 高広 (Hasebe Takahiro) (00633166)	北海道大学・理学研究院・准教授 (10101)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計10件

国際研究集会 Recent developments in Arrangements	開催年 2021年～2021年
---	--------------------

国際研究集会 Hokkaido Summer Institute 2019 ``Recent advances in matroids and Tutte polynomials''	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Hyperplane Arrangements and Japanese-Australian Workshop on Real and Complex Singularities	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Matroids, Reflection Groups, and Free Hyperplane Arrangements	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 Categorical and Analytic Invariants in Algebraic Geometry VI	開催年 2018年～2018年
国際研究集会 Workshop, HYPERPLANE ARRANGEMENTS: RECENT ADVANCES AND OPEN PROBLEMS.	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Branched Coverings, Degenerations, and Related Topics 2019	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Arrangement in Ticino	開催年 2022年～2022年
国際研究集会 Combinatorics, geometry and commutative algebra of hyperplane arrangements	開催年 2023年～2023年
国際研究集会 Various Guises of Reflection Arrangements	開催年 2023年～2023年

8 . 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
中国	Xi ' an Jiaotong-Liverpool University			
ドイツ	Bremen University	Bochum University		
英国	University of Glasgow			
カナダ	Western Univesrity			
ドイツ	University of Bochum	Hannover University	Bremen University	
米国	Iowa State University			