

令和 6 年 6 月 17 日現在

機関番号：32641

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18H01117

研究課題名(和文)特異空間上のアインシュタイン計量・リッチフローおよび山辺不変量の研究

研究課題名(英文) Einstein metrics and Ricci flow on singular spaces, and study of the Yamabe invariant

研究代表者

芥川 一雄 (Akutagawa, Kazuo)

中央大学・理工学部・教授

研究者番号：80192920

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 12,500,000円

研究成果の概要(和文)：特異Einstein多様体の典型例であるcone angle $2\pi a$ のedge-cone次元球面 (S^n, h_a) を扱い、その上で山辺の問題を考えた。 $0 < a < 1$ の場合は、小島型の定理、すなわち h_a に共形的な定スカラー曲率計量は、 (S^n, h_a) の特異集合 S^{n-2} を保つ共形変換による h_a の引き戻しとなることを示した。 $a = 2$ の場合は、 h_a に共形的なedge-cone山辺計量は存在しないことを示した。
境界付きコンパクトリーマン多様体上の適切な境界値問題を考えリッチフローの研究成果を得た。境界付きコンパクトEinstein多様体に対する小島型定理を得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

特異集合を持つ特異リーマン多様体の幾何解析的研究は、現在盛んに研究されている分野である。特に山辺計量やEinstein計量に対する研究は重要である。与えられた多様体上で良い性質を持つEinstein計量の存在を示すことは非常に重要であるが、一般にその存在を期待することは不可能である。そこで特異集合を許容する特異Einstein計量が重要となる。またその良さの指標となる山辺不変量の研究も、特異Einstein計量の研究と密接に関係していて、重要である。

本研究はその方向に向けた基礎的な研究となっている。

研究成果の概要(英文)： We consider the Yamabe problem on edge-cone n -spheres (S^n, h_a) with cone angle $2\pi a$. When $0 < a < 1$, we have proved that any constant scalar curvature metric in the conformal class $[h_a]$ is the pull-back of h_a by a conformal transformation of $(S^n, [h_1])$ keeping the singularities S^{n-2} of h_a . When $a = 2$, we have proved that there is no edge-cone Yamabe metric in $[h_a]$. When $1 < a < 2$, the Yamabe problem is still unsolvable.

We have obtained some results of the Ricci flow with a suitable boundary condition on compact manifolds with boundary. We have also obtained an Obata-type theorem on compact Einstein manifolds with boundary.

研究分野：幾何学(微分幾何, 幾何解析)

キーワード：スカラー曲率 リッチフロー 山辺不変量 山辺計量 特異アインシュタイン計量 edge-cone 球面 edge-cone 山辺計量 特異山辺の問題

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

様式 C - 19、F - 19 - 1 (共通)

1. 研究開始当初の背景

閉ケーラー多様体上でケーラー・アインシュタイン計量を求める問題、すなわち Calabi の問題は、正の場合も最終的に Chen-Donaldson-Sun および Tian によって肯定的に解決された。一方、実の閉リーマン多様体の場合、良いアインシュタイン計量を求める問題の一つの定式化は、「山辺不変量を達成するアインシュタイン計量を求める」である。このような計量は、supreme アインシュタイン計量と呼ばれる。

与えられた閉多様体上では、一般に supreme アインシュタイン計量の存在は期待できない。何故ならアインシュタイン計量を許容しない多様体が存在するからである。しかしながら特異計量までその範囲を拡張すれば、supreme アインシュタイン計量の存在問題は意味を持つと考えられる。

そのため、研究代表者の芥川およびその共同研究者の Carron, Mazzeo は、先ず特異リーマン計量に対する特異山辺の問題を考え、一般化された Aubin の不等式に関して、それが generic な場合 (i.e., strict な不等式が成立する場合)、特異山辺の問題は肯定的に解決すること、すなわち特異山辺計量の存在を示した。

supreme 特異アインシュタイン計量の存在の研究は、これからの研究課題であるというのが、研究開始当時の背景であった。

2. 研究の目的

与えられ閉多様体 M に最も適したリーマン計量の存在の研究を一つの指標として、共形類 C の共形不変量である山辺定数 $Y(M, C)$ と M の微分位相不変量である山辺不変量 $Y(M)$ が定義された。山辺不変量を達成する共形類 C 、すなわち $Y(M, C) = Y(M)$ となる C 内の山辺計量は、アインシュタイン計量と予想されている。実際 $Y(M) = 0$ の場合は、この予想は正しいことが示されている。このようなアインシュタイン計量は、supreme アインシュタイン計量と呼ばれるが、一般には存在しない。そのため適切な退化を許容した特異計量 h に範囲を拡張して、 $Y(M, [h]) = Y(M)$ となる特異アインシュタイン計量 h の存在問題を考える。その基礎研究として、具体的に次の問題を考える。

- (1) 特異空間、特に特異アインシュタイン多様体上の山辺の問題および山辺不変量への応用の研究、
 - (2) simple edge 空間上のリッチフローの研究、
 - (3) 関連して、境界付きコンパクトアインシュタイン多様体、および境界付きコンパクト多様体上のリッチフローの研究、
- 等を行う。

3. 研究の方法

- (1) 「Geometric Analysis in Geometry and Topology」という国際ワークショップを開催して、国内外(主に国外)の研究者を招聘し、本研究課題や関連する最新の話題の連続講演を基本として互いに研究連絡を行う。
- (2) ドイツのレーゲンスブルグ大学およびアメリカのスタンフォード大学で本研究課題に関係した国際研究集会を開催し、互いに研究連絡を行う。
- (3) 研究連携者と連絡を頻繁に取り研究を進める。

4. 研究成果

(1) 閉リーマン多様体上では、山辺の問題は常に肯定的に解決することが知られている。一方、特異多様体上では一般に山辺の問題は解を持たない。このことを orbifold に対して最初に示したのが Viaclovski である。芥川と Mondello は、特異アインシュタイン多様体の典型例である cone angle が $2\pi a$ の edge-cone n 次元球面 (S^n, h_a) 上の特異山辺の問題を考えた。 $0 < a < 1$ の場合は、 $[h_a]$ 内の任意の定スカラー曲率計量は、 (S^n, h_a) の特異集合 S^{n-2} を保つ $(S^n, [h_1])$ の共形変換による h_a の引き戻しによって与えられる、という小島型の結果が成立する。 $a \geq 2$ の場合は、 $[h_a]$ 内には edge-cone 山辺計量は存在しないという結果が得られる。 $1 < a < 2$ の場合は、未解決である。これは特異山辺の問題に関する、2 番目の反例を与える結果である。Viaclovski の場合の特異集合の次元は 0 で最小であり、我々の場合の特異集合の次元は $n-2$ で最大であるという、対照的な反例である。この結果は以下の論文にまとめてある。

・ Kazuo Akutagawa, Ilaria Mondello, Non-existence of Yamabe minimizers on singular spheres, Journal of Geometric Analysis 32:194(2022), 1—20. (査読あり)

(2) 特異多様体と境界付き多様体の幾何解析にはある種の共通点がある。そこで境界付きコンパクト・アインシュタイン多様体を考え、定スカラー曲率計量の研究を行い、小島型定理を得た。この結果は下記の論文にまとめてある。

・Kazuo Akutagawa, An Obata-type theorem on compact Einstein manifolds with boundary, *Geometriae Dedicata* 213(2021), 577–587. (査読あり)

(3) 境界付きコンパクト多様体上で新しい適切な境界値条件を与え、リッチフローの初期値問題に関する結果を得た。この結果は下記の論文にある。

・芥川和雄, 境界付き多様体上のリッチフロー, 2021 年度日本数学会秋季分科会, 総合講演アブストラクト, 1–11. (査読なし)

(4) 与えられた閉多様体 M 上の cone angle が $2\pi\alpha$ ($0 < \alpha < 1$) の正の edge-cone アインシュタイン計量 h を考える。このとき、「滑らかなリーマン計量族 $\{g_s\}$ ($0 < s < s_0$) が存在して、 g_s のリッチ曲率の下限が h のそれにいくらか近づけることができるものが存在する」ことを示した。応用として、 M の山辺不変量 $Y(M)$ に関して、 $Y(M) \geq R_h \cdot V_h^{2/n}$ という下からの評価が得られる。ここで、 R_h は h のスカラー曲率、 V_h は (M, h) の体積を表す。この結果は下記の論文にまとめる予定である。

・Kazuo Akutagawa, Ilaria Mondello, Einstein edge-cone metrics and the Yamabe invariant. (執筆予定)

(5) 「4次元球面上の正のアインシュタイン計量は標準計量に限る」という予想があり Gursky はこの予想を肯定的に根拠付けるギャップ定理を得ている。我々それをさらに拡張するギャップ定理を得た。この結果は下記の論文にまとめてある。

・Kazuo Akutagawa, Hisaaki Endo, Harish Seshadri, A gap theorem for positive Einstein metrics on the four-sphere, *Mathematische Annalen* 373(2019), 1329–1339. (査読あり)

(6) 特異空間上の山辺の問題を Dirichlet 空間まで一般化し、一般化された Aubin の不等式が strict な場合に特異山辺の問題は可解であることを示した。この結果は下記の論文にまとめてある。

・Kazuo Akutagawa, Gilles Carron, Rafe Mazzeo, The Yamabe problem on Dirichlet spaces, *Tsinghua Lectures in Mathematics*, 101–122, *Adv. Lect. Math.* 45, International Press (2019).

(7) その他、山辺不変量関係で以下の論文を執筆した。

・Kazuo Akutagawa, The Yamabe invariant, *Sugaku Expositions* 34 (2021). (査読あり)

・芥川和雄, 幾何解析の問題：山辺不変量の問題, 数理解析研究所講究録 2211, 複素幾何学の諸問題 II, (2022), 577–587. (査読なし)

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計8件（うち査読付論文 5件/うち国際共著 3件/うちオープンアクセス 1件）

1. 著者名 Kazuo Akutagawa, Ilaria Mondello	4. 巻 32
2. 論文標題 Non-existence of Yamabe minimizers on singular spheres	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 The Journal of Geometric Analysis	6. 最初と最後の頁 1--20
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s12220-022-00923-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 芥川和雄(一雄)	4. 巻 2211
2. 論文標題 幾何解析の問題：山辺不変量の問題	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 RIMS Kokyuroku, 「複素幾何学の諸問題II」	6. 最初と最後の頁 72--85
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 芥川和雄(一雄)	4. 巻 1
2. 論文標題 境界付き多様体上のリッチフロー	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 2021年度日本数学会秋季分科会, 総合講演アブストラクト	6. 最初と最後の頁 11
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -
1. 著者名 Kazuo Akutagawa	4. 巻 213
2. 論文標題 An Obata-type theorem on compact Einstein manifolds with boundary	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Geometriae Dedicata	6. 最初と最後の頁 577--587
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10711-021-00598-y	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -

1. 著者名 Kazuo Akutagawa	4. 巻 34
2. 論文標題 The Yamabe invariant	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Sugaku Expositions	6. 最初と最後の頁 1--34
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 kazuo Akutagawa, Hisaaki Endo, Hrish Seshadri	4. 巻 373
2. 論文標題 A gap theorem for positive Einstein metrics on the four-sphere	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 1329--1339
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00208-018-1749-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Kazuo Akutagawa	4. 巻 1
2. 論文標題 特異球面上の山辺計量の非存在とcsc計量族の小島型定理	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 2019年度福岡大学微分幾何研究集会, 報告集	6. 最初と最後の頁 97--105
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Akutagawa Kazuo, Endo Hisaaki, Seshadri Harish	4. 巻 373
2. 論文標題 A gap theorem for positive Einstein metrics on the four-sphere	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Mathematische Annalen	6. 最初と最後の頁 1329--1339
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計7件（うち招待講演 7件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 芥川和雄(一雄)
2. 発表標題 The Ricci flow on manifolds with boundary and finite singular time
3. 学会等名 東京工業大学「東工大幾何セミナー」（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 芥川和雄(一雄)
2. 発表標題 幾何解析の問題
3. 学会等名 研究会「複素幾何学の諸問題II」（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 芥川和雄(一雄)
2. 発表標題 境界付き多様体上のリッチフロー
3. 学会等名 2021年度日本数学会秋季総合分科会，総合講演（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Kazuo Akutagawa
2. 発表標題 特異球面上の山辺計量の非存在とcsc計量族の小畠型定理
3. 学会等名 2019年度福岡大学微分幾何研究会（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Kazuo Akutagawa
2. 発表標題 Edge-cone Einstein metrics and Yamabe metrics
3. 学会等名 国際研究集会：The 10th MSJ-SI: The Role of Metrics in the Theory of Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kazuo Akutagawa
2. 発表標題 An Obata-type theorem on compact Einstein manifolds with boundary
3. 学会等名 2018年度福岡大学微分幾何研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Kazuo Akutagawa
2. 発表標題 Obata-type theorems on compact Einstein manifolds with boundary
3. 学会等名 研究集会：リーマン幾何と幾何解析 (招待講演)
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 芥川和雄 (分筆)	4. 発行年 2018年
2. 出版社 朝倉書店	5. 総ページ数 425
3. 書名 幾何学百科 II 幾何解析	

〔産業財産権〕

〔その他〕

Kazuo Akutagawa https://sites.google.com/site/kazuokutagawa/
--

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計6件

国際研究集会 第2回日独友好幾何学研究集会「Geometric Analysis」	開催年 2021年～2021年
国際研究集会 第2回日独友好幾何学研究集会「Geometric Analysis」	開催年 2020年～2020年
国際研究集会 The First Geometry Conference for Friendship of Japan and Germany	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Geometric Analysis in Geometry and Topology 2018	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Geometric Analysis	開催年 2023年～2023年
国際研究集会 Collaborative workshop on Geometric Analysis	開催年 2023年～2023年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
フランス	フランス	Universit de Paris-Est Creteil	
インド	インド	Indian Institute f Science, Bangalore	
米国	スウェーデン	University of Gothenburg	
米国	米国	University of California, Irvine	

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	Universite Paris 12			
ドイツ	University of Regensburg			
米国	Rafe Mazzeo	Stanford University		
フランス	Ilaria Mondello	Universite Paris Est Creteil		