

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 6 年 6 月 17 日現在

機関番号：32689

研究種目：基盤研究(B)（一般）

研究期間：2018～2022

課題番号：18H01125

研究課題名（和文）微分幾何的擬等角拡張と調和解析の普遍タイヒミュラー空間論

研究課題名（英文）Quasiconformal extension in differential geometry and theory of the universal Teichmueller space in harmonic analysis

研究代表者

松崎 克彦（Matsuzaki, Katsuhiko）

早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授

研究者番号：80222298

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費） 10,600,000円

研究成果の概要（和文）：タイヒミュラー空間はこれまでリーマン面の変形空間として数学の様々な分野で研究がされてきた。複素解析的な理論の基盤を与える普遍タイヒミュラー空間の研究では、対象となる写像が絶対連続程度の滑らかさを仮定すれば、解析の内容が豊富になることがわかってきた。本研究課題では、BMO空間やベソフ空間などの調和解析的な理論をタイヒミュラー空間論に組み入れて、複素解析と実解析の相互の補完のもとで関数空間のタイヒミュラー空間の理論を発展させた。とくに、弦弧曲線やヴェイユ・ピーターソン曲線などの族を対応するタイヒミュラー空間で座標付けし、リーマン面に代わりこれらの曲線の複素解析的な変形理論の基礎をつくった。

研究成果の学術的意義や社会的意義

タイヒミュラー空間の複素解析的研究は、学術的にはリーマン面や曲線の変形理論の理解を深め、代数幾何学、力学系理論、数理物理学など多くの分野での基礎理論を強化する。この研究は古典的な調和解析の理論を融合し、複素解析と実解析の相互補完を図ることができる。社会的には、これらの理論的進展は画像処理、自然現象のモデル化など、精密な幾何学的・解析的枠組みを必要とする分野に貢献する。タイヒミュラー空間の理解が深まることで、これらの応用領域における新たな革新が促進されることから理論数学と実践的応用の両面で広範な影響をもたらす。

研究成果の概要（英文）：The Teichmueller space has long been studied in various fields of mathematics as a deformation space of Riemann surfaces. In the study of the universal Teichmueller space, which provides the foundation for complex analytic theory, it has been found that assuming absolute continuity as the regularity in the mappings enriches the content of the analysis. This research project has integrated harmonic analytic theories of BMO spaces and Besov spaces into the theory of Teichmueller spaces. By doing so, it has developed the theory of Teichmueller spaces of function spaces through the mutual complementarity of complex analysis and real analysis. In particular, it has established the foundation for the complex analytic deformation theory of families of curves, such as quasicircles and Weil-Petersson curves, instead of Riemann surfaces, by parametrizing them within the corresponding Teichmueller spaces.

研究分野：タイヒミュラー空間論

キーワード：複素解析 実解析

1. 研究開始当初の背景

(1) 普遍タイヒミュラー空間の部分空間に構造を付加するために、円周上の写像は単位円板の擬等角写像に拡張され、ベルトラミ微分の空間として解析される。擬等角拡張の方法は空間の構造の解析に直結する。古典的な Beurling-Ahlfors 拡張、ポアソン積分による調和拡張に加え、群作用との整合性をもつ等角重心拡張が多くの場面で有用であったが、近年発展した双曲的調和拡張、極小ラグランジュ拡張により、新たな研究の可能性が広がった。双曲的調和拡張は微分幾何の Schoen 予想を解決し、調和写像のホップ微分の評価が微分同相写像のタイヒミュラー空間に有効である。極小ラグランジュ拡張は、円板の測地線層に沿った普遍タイヒミュラー空間の地震変形を記述できる。

(2) リーマン面のタイヒミュラー空間を埋め込む普遍タイヒミュラー空間を離れて、円周上の微分同相写像のパラメーター空間となる普遍タイヒミュラー空間の研究では C 級微分同相写像の空間に解析構造が導入され、円周上のソボレフ空間 $H^{3/2}$ で接空間を表現する方法が示されている。しかし、より直接的に普遍タイヒミュラー空間本来の擬等角写像由来の構造に準拠した理論として代表的なものには、Astala-Zinsmeister による BMO タイヒミュラー空間および Gardiner-Sullivan による対称写像のタイヒミュラー空間の導入がある。また、Cui および Takhtajan-Teo による 2 乗可積分なベルトラミ微分からなる部分空間 T^2 のヴェイユ・ピーターソン計量の研究がある。これ以後、擬等角写像拡張を用いた普遍タイヒミュラー空間の部分空間の研究が活性化した。とくに Shen は 2 つの重要な研究をしている。一つは BMO タイヒミュラー空間の理論を発展させたもので、もう一つは T^2 とその上のヴェイユ・ピーターソン計量を円周上の対称写像とソボレフ空間の言葉のみで表現したものである。本課題での普遍タイヒミュラー空間の部分空間の研究は、枠組みとしてはこれらの研究と近接している。

(3) 微分幾何の立場では、双曲的調和写像を基盤としたタイヒミュラー空間論があり、Wolf らによるコンパクトリーマン面のタイヒミュラー空間論は一定の成功をおさめていた。円周の自己同相写像の円板への拡張は、与えられた境界値をもつ双曲的調和写像の存在と一意性によるが、任意の擬対称自己同相写像が拡張をもつかどうかは Schoen 予想と呼ばれ、未解決の問題であった。Tam-Wan の研究は、この問題点を除けば、タイヒミュラー空間に複素構造を与えるベアス埋め込みのシュワルツ微分の評価も与えていて、擬等角写像を用いたタイヒミュラー空間論と同等の議論が展開されている。Markovic は Schoen 予想を研究し、対称写像に対しては既に証明を与えていたが、最近になって完全な解決に至った。一方、双曲空間を無限遠境界まで込めてローレンツ空間のなかに埋め込み、タイヒミュラー空間を考察する方法は Penner による飾り付きタイヒミュラー空間の理論などがあつたが、近年の潮流は、双曲平面を反ドジッター空間の境界とみなす方法であり、双曲 3 次元多様体の理論と並行した理論が展開できる場として脚光を浴びてきた。その中で Bonsante-Schlenker の研究はタイヒミュラー空間論に直結する極小ラグランジュ擬等角拡張という方法を提示している。本課題では、これら微分幾何的な擬等角拡張の方法を、従来のタイヒミュラー空間論に組み込んだ研究をめざすが、とくに極小ラグランジュ擬等角拡張の可能性について着目している。

2. 研究の目的

擬等角拡張の理論の新展開を契機に、普遍タイヒミュラー空間の部分空間に関連する諸問題を見直し、その解決を目指した新しい手法を開発することを目的としている。

(1) C^1 級微分同相写像に近い滑らかさをもつ写像族に対するタイヒミュラー空間の理論を研究する。それによく適合するものが調和解析的な関数空間から定義される BMO タイヒミュラー空間である。BMO 関数は John-Nirenberg により導入され、のちに Fefferman-Stein によりハーディー空間 H^1 の双対空間が BMO 空間であることが証明された。この関数空間を使って BMO タイヒミュラー空間が定義されるが、特筆すべきは、この空間の擬等角写像のベルトラミ微分が Carleson 測度と対応することである。Carleson 測度の有用性は実解析学で深く研究されており、Carleson ノルムにより位相が定義される BMO タイヒミュラー空間の解析には、これらの研究成果を援用できる。また、このベルトラミ微分のあるクラスは、対応する擬円周がその上の 2 点を結ぶ弧と弦の長さが比較可能であること(弦弧曲線)で特徴付けられ、この幾何学的対象を調和解析的手法で研究することでタイヒミュラー空間に新しい観点が導入されることが期待できる。このような空間による近似を用いて C^1 級微分同相写像のタイヒミュラー空間を解析する。

(2) 古典的なポアソン積分による円周の自己同相写像が擬等角写像となるクラスとしてソボレ

フ空間 $H^{1/2}$ がある．この擬等角拡張はディリクレ積分有限なユークリッド的調和写像である． $H^{1/2}$ のソボレフノルムと拡張された写像のディリクレノルムは等しい．この空間が擬対称写像による引き戻しで閉じている(ディリクレ空間は擬等角写像による引き戻しで閉じている)ことは古典的結果であるが，この作用素が擬対称写像のタイヒミュラー位相に関して連続的に動くことの証明には多くの問題が関連している．擬対称写像に対応する擬円周に対して定義されるフレドホルム固有値の連続性をディリクレ原理から証明できることは以前の研究で行っている．この証明を精査し，上記の問題に適用するための改良を行う．

(3) Bonsante-Schlenker はローレンツ幾何をもつ反ドジッター空間 AdS^3 のなかで双曲平面を研究する過程で，円周の自己同相写像を一意的に単位円板に拡張する方法を発見した．円周の擬対称同相写像のグラフは AdS^3 の境界の閉曲線を定める．これを境界にもつような極大な空間的な曲面で，ガウス曲率が一様に負であるものが一意的に存在する．この曲面上の各点から未来方向の時間的ベクトルの対応をとることにより， AdS^3 の境界のなかの双曲平面間の写像が定義される．この写像のグラフを双曲平面の直積の中の曲面とみなすと，平均曲率が0の極小曲面であり，シンプレック形式の制限が0となるラグランジュ部分多様体である．このようにして一意的に定義される単位円板の自己同相写像は，もとの擬対称同相写像の擬等角拡張となる．これを極小ラグランジュ擬等角拡張という．この拡張法は幾何学的に自然な構成により，群作用との整合性ももっている．反ドジッター空間の構造を付加している点で，より精密な情報を取り出せ，問題解決の新しい手段となる可能性をもつ．反面，境界値である擬対称同相写像からの直接的な表現をもたず，とくに最大歪曲率の評価も明らかではない．この問題点を解消するため，極小ラグランジュ擬等角拡張により定まる普遍タイヒミュラー空間からベルトラミ微分の空間への切断が実解析的であることを証明する．この性質が，この擬等角拡張をタイヒミュラー空間論のなかで有効に使うための基盤となる．

3. 研究の方法

(1) 当初の研究の方法としては以下を計画していた．

(a) 極小ラグランジュ擬等角拡張のベルトラミ微分の特徴付けの結果を用いて，極小ラグランジュベルトラミ微分の空間をパラメーターで表現する．考えるタイヒミュラー空間(たとえば微分同相写像族)からの極小ラグランジュ切断の連続性は，対応するベルトラミ微分の空間の位相に関して，パラメーター表現が連続であることから証明する．

(b) ポアソン積分による調和拡張を用い，ディリクレノルムの連続性を考察する．調和拡張の正則部分への分解のリプシッツ性に関する研究を円周に沿う等角貼り合わせを使ってできる擬円周についての結果に翻訳する．そのうち，擬円周のフレドホルム固有値の連続性から，上の問題に至る道をつくる．

(c) 2乗可積分タイヒミュラー空間の円周上のソボレフ空間による表現への上記の問題の適用については，この空間をリーマン面上に導入し，ヴェイユ・ピーターソン計量の負曲率性が証明されている．Shen の理論をフックス群同変な円周上のソボレフ空間の理論に拡張することは着実な研究の方向性となる．

(d) Carleson 測度と BMO 関数に関する調和解析学の理論を援用して，BMO タイヒミュラー空間を研究し，ヘルダー連続微分をもつ微分同相写像のタイヒミュラー空間に関する剛性定理と類似の結果が VMO タイヒミュラー空間(BMO タイヒミュラー空間の部分空間で，振幅平均が漸近的に0に収束する部分族からなる)に対して成立するかどうかを調べる．

(2) BMO タイヒミュラー空間は普遍タイヒミュラー空間 T に含まれ，単位円板上のベルトラミ係数がカルレソン測度を定めるもので特徴づけられる．その測度が境界で退化するものからなる部分空間が VMO タイヒミュラー空間である．この両者の関係は， T と漸近的等角写像からなる部分空間 T_0 の関係に対応し，商空間である漸近的タイヒミュラー空間の理論が，BMO/VMOにも応用できる．この課題研究では，商ベアス埋め込み写像の単射性を用いて漸近的 BMO タイヒミュラー空間に複素構造を導入する．また，BMO タイヒミュラー空間に新たにカルレソン計量という群構造に関して不変で完備な計量を定義する．それらを用いて，弦弧曲線と呼ばれる擬円に対応する BMO タイヒミュラー空間の部分領域の連結性に関する問題を解決するための方法を考察する．

(3) 普遍タイヒミュラー空間は擬等角写像を用いて構成され，すべてのタイヒミュラー空間を内包し，その複素構造を決定する空間である．これは単位円周から複素平面への擬対称埋め込みの空間とみなされる．近年，その部分空間の研究が進展し，とくに円周の微分同相写像の空間には複素構造やケーラー計量が導入され，数理物理学における超弦理論では紐の相を記述するパラメーター空間となっている．このように曲線の変形を記述する空間として認識される普遍タイヒミュラー空間を用いてヴェイユ・ピーターソン曲線を解析する．パラメータ付きの曲線の座標付けはベアスの同時一意化の議論を用いてタイヒミュラー空間の直積で与える．この一般論を各種のタイヒミュラー空間で行うことにより，ヴェイユ・ピーターソン曲線や弦弧曲線上で行われていたセゲー射影やコーシー変換の調和解析的な理論を，擬等角写像を用いた複素解析的

な手法で拡張する．

4．研究成果

(1) タイヒミュラー空間上の計量としてはタイヒミュラー計量やヴェイユ・ピーターソン計量が代表的であるが、これらはどのようなバナッハ空間をモデルとする複素構造を導入するかにより自然に定義されるフィンスラー計量である．本研究で扱う BMO タイヒミュラー空間は、単位円板および単位円周上で定義される BMO 関数に関連した擬等角写像のなす空間である．この空間にはある方法で Carleson 測度を構成するような正則 2 次微分からなるバナッハ空間をモデルとした複素構造が入り、したがって自然に Carleson 計量と名付けた計量が定義できる．この計量の性質を考察することが当初の研究計画であった．しかし、実軸という非コンパクトな定義域上で漸近的等角写像のタイヒミュラー空間および VMO タイヒミュラー空間を考察するという問題に遭遇し、その研究に関して以下のような成果が得られた．擬等角写像(擬対称写像)を限定して普遍タイヒミュラー空間の部分空間を考える場合には、その条件をコンパクト集合(単位円周)上で置くか非コンパクト集合(実軸)上で置くかで理論が大きく異なる場合がある．

(a) 実軸上の VMO タイヒミュラー空間を構成する強対称写像について、それ自身および逆写像の一樣連続性を仮定すればその全体は群構造をもち、また退化 Carleson 測度を誘導するような上半平面上の擬等角写像に拡張することが証明された．

(b) 実軸上の漸近的等角写像のタイヒミュラー空間の概念を一般化し、区分的な対称写像による空間を普遍タイヒミュラー空間の閉部分空間として定式化した．これらの空間の増大列による普遍タイヒミュラー空間を補間する結果および商空間の構成を得た．計量については、商空間の複素構造を定義し、商フィンスラー計量を与えた．また、小林計量とタイヒミュラー計量の比較について、先行研究の方法では解決しない問題点を提示した．

(2) 調和解析的な擬等角拡張の理論において有用な進展があった．以下の (a) は VMO タイヒミュラー空間、(b) は可積分タイヒミュラー空間に関する理論に応用をもつものである．

(a) 熱核を畳み込みの核とした Beurling-Ahlfors 拡張の変形を用いて、微分の \log が VMO となる擬対称写像(強対称写像)の擬等角拡張の歪曲係数が、上半平面上の退化するカルレソン測度を誘導することを示した．

(b) ヴェイユ・ピーターソン写像および曲線は、双曲計量に関する 2 乗可積分なベルトラミ係数で定義されるタイヒミュラー空間によりパラメトライズされる．Shen による一連の研究があり、最近では擬等角写像を用いない微分幾何的な特徴付けが Bishop により与えられている．現在活発な研究が進んでいるこの分野に以下の観点から新しい議論を付け加えることができた．

(i) ヴェイユ・ピーターソン写像および曲線を p 乗可積分なベルトラミ係数で与えられるものに一般化する．対応するタイヒミュラー空間の理論は既にあるが、強対称写像がつくるペゾフ空間に関する基本的結果、タイヒミュラー空間の位相群としての性質などを証明した．(ii) ヴェイユ・ピーターソン曲線を同時一意化の方法によりタイヒミュラー空間の直積と同一視し、そこからヴェイユ・ピーターソン強対称写像の微分の \log への対応が、像の上への双正則写像であることを示した．これは Shen の議論とは逆の方向からのアプローチであるが、ヴェイユ・ピーターソン曲線の空間により明快な座標を与えることができ、これまでに研究された結果を統一的に理解することが可能になった．熱核を用いた強対称写像の擬等角拡張により、この対応の逆写像を十分大きな範囲で与えることができた．

(3) ヴェイユ・ピーターソン計量を普遍タイヒミュラー空間に導入する研究は Takhtajan-Teo によりなされ、ヒルベルト多様体の構造および曲率に関する研究がなされた．その各連結成分がヴェイユ・ピーターソンタイヒミュラー空間である．複素解析的なタイヒミュラー空間論の枠組みでの研究は Shen が推し進めている．ヴェイユ・ピーターソン曲線は、このタイヒミュラー空間に対応する擬円周である．最近、Bishop はこの曲線に関する包括的な研究を行い、複素解析、平面幾何、曲面論、3 次元双曲幾何など様々な観点からの特徴付けを与えている．また、Wang は SLE 理論の研究のなかで、曲線のレブナーエネルギーの有限性がヴェイユ・ピーターソン曲線であるための同値条件であることを証明した．本研究課題では、ヴェイユ・ピーターソン擬等角写像を実軸へ拡張した擬対称写像が属する関数空間の特徴付けのために、熱核を畳み込みの核とする擬等角拡張を用いた議論を展開した．また、ヴェイユ・ピーターソン曲線の正則な座標付けを同時一意化という方法を用いて行ない、パラメーターに関する解析的依存性に関する理論を簡明に展開することに成功した．また、BMO タイヒミュラー空間と弦弧曲線についても類似の研究を行った．複素平面の双リプシッツ自己同相写像による直線の像を弦弧曲線という．弦弧曲線を像にもつような直線の埋め込みの全体は BMO タイヒミュラー空間の直積で座標付けすることができる．本研究課題では、弦弧曲線の空間から実軸上の BMO 関数からなる複素バナッハ空間の領域への対応が双正則同相になるという基本定理を証明した．さらに、この 2 つの同値な複素構造を利用して、関連する空間、とくに VMO タイヒミュラー空間について、写像の解析的な依存性に関して明確な説明を与えた．

(4) 平面上の曲線族にタイヒミュラー空間を使って座標付けを行い、その変形を研究する方法

について以下の成果があった。

(a) ヴェイユ・ピーターソンタイヒミュラー空間とその曲線についての研究：ヴェイユ・ピーターソン計量を普遍タイヒミュラー空間に導入し、ヒルベルト多様体の構造および曲率に関する研究がこれまでになされてきた。ヴェイユ・ピーターソン曲線は、このタイヒミュラー空間に対応する擬円周である。最近、Bishop はこの曲線に関する包括的な研究を行い、複素解析、平面幾何、曲面論、3次元双曲幾何など様々な観点からの特徴付けを与えている。また、Wang は SLE 理論の研究のなかで、曲線のレブナーエネルギーの有限性がヴェイユ・ピーターソン曲線であるための同値条件であることを証明した。本研究課題では、ヴェイユ・ピーターソン擬等角写像を実軸へ拡張した擬対称写像が属する関数空間の特徴付けのために、熱核を畳み込みの核とする擬等角拡張を用いた議論を展開した。また、ヴェイユ・ピーターソン曲線の正則な座標付けを同時一意化という方法を用いて行ない、パラメーターに関する解析的依存性に関する理論を簡明に展開することに成功した。

(b) BMO/VMO タイヒミュラー空間と弦弧曲線についての研究：複素平面の双リプシッツ自己同相写像による直線の像を弦弧曲線という。弦弧曲線を像にもつような直線の埋め込みの全体は BMO タイヒミュラー空間の直積で座標付けすることができる。本研究課題では、弦弧曲線の空間から実軸上の BMO 関数からなる複素バナッハ空間の領域への対応が双正則同相になるという基本定理を証明し、この2つの同値な複素構造を利用して、関連する空間の間の写像の解析的な分依存性に関して明確な説明を与えた。とくに、弦弧曲線のリーマン写像パラメーターが弧長パラメーターに関して不連続になることを証明した。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計28件（うち査読付論文 26件 / うち国際共著 21件 / うちオープンアクセス 14件）

1. 著者名 Wei Huaying, Matsuzaki Katsuhiko	4. 巻 53
2. 論文標題 Beurling-Ahlfors extension by heat kernel, A weights for VMO, and vanishing Carleson measures	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Bulletin of the London Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 723 ~ 739
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1112/blms.12454	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Wei Huaying, Matsuzaki Katsuhiko	4. 巻 11
2. 論文標題 Symmetric and strongly symmetric homeomorphisms on the real line with non-symmetric inversion	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Analysis and Mathematical Physics	6. 最初と最後の頁 79
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s13324-021-00510-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Wei Huaying, Matsuzaki Katsuhiko	4. 巻 314
2. 論文標題 Teichmueller spaces of piecewise symmetric homeomorphisms on the unit circle	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Pacific Journal of Mathematics	6. 最初と最後の頁 495 ~ 514
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/pjm.2021.314.495	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 Matsuzaki Katsuhiko	4. 巻 36
2. 論文標題 Teichmueller space of circle diffeomorphisms with Hoelder continuous derivatives	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Revista Matematica Iberoamericana	6. 最初と最後の頁 1333 ~ 1374
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/RMI/1169	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Matsuzaki Katsuhiko	4. 巻 44
2. 論文標題 Injectivity of the quotient Bers embedding of Teichmueller spaces	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica	6. 最初と最後の頁 657 ~ 679
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5186/aasfm.2019.4449	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Wei Huaying, Matsuzaki Katsuhiko	4. 巻 7
2. 論文標題 Teichmueller spaces of generalized symmetric homeomorphisms	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society, Series B	6. 最初と最後の頁 52 ~ 66
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/bproc/47	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Matsuzaki Katsuhiko	4. 巻 140
2. 論文標題 Rigidity of groups of circle diffeomorphisms and Teichmueller spaces	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal d'Analyse Mathématique	6. 最初と最後の頁 511 ~ 548
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11854-020-0095-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Yanagishita Masahiro	4. 巻 44
2. 論文標題 Smoothness and strongly pseudoconvexity of p-Weil-Petersson metric	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica	6. 最初と最後の頁 15 ~ 28
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5186/aasfm.2019.4413	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Wei Huaying, Matsuzaki Katsuhiko	4. 巻 32
2. 論文標題 The p -Weil-Petersson Teichmüller space and the quasiconformal extension of curves	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 The Journal of Geometric Analysis	6. 最初と最後の頁 213
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s12220-022-00946-8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Wei Huaying, Matsuzaki Katsuhiko	4. 巻 302
2. 論文標題 The VMO-Teichmüller space and the variant of Beurling-Ahlfors extension by heat kernel	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematische Zeitschrift	6. 最初と最後の頁 1739 ~ 1760
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00209-022-03104-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Matsuzaki Katsuhiko, Wei Huaying	4. 巻 48
2. 論文標題 Space of chord-arc curves and BMO/VMO Teichmüller space	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Annales Fennici Mathematici	6. 最初と最後の頁 27 ~ 42
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.54330/AFM.122367	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Wei Huaying, Matsuzaki Katsuhiko	4. 巻 417
2. 論文標題 BMO embeddings, chord-arc curves, and Riemann mapping parametrization	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Advances in Mathematics	6. 最初と最後の頁 108933
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.aim.2023.108933	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Wei Huaying, Matsuzaki Katsuhiko	4. 巻 99
2. 論文標題 The p-integrable Teichmueller space for $p \geq 1$	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 37 ~ 42
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3792/PJAA.99.008	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Wei Huaying, Matsuzaki Katsuhiko	4. 巻 33
2. 論文標題 Parametrization of the p-Weil-Petersson curves: holomorphic dependence	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 The Journal of Geometric Analysis	6. 最初と最後の頁 292
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s12220-023-01338-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Wei Huaying, Matsuzaki Katsuhiko	4. 巻 72
2. 論文標題 Strongly symmetric homeomorphisms on the real line with uniform continuity	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Indiana University Mathematics Journal	6. 最初と最後の頁 1553 ~ 1576
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1512/iumj.2023.72.9323	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Yanagishita Masahiro	4. 巻 26
2. 論文標題 Completeness of p-Weil-Petersson distance	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Conformal Geometry and Dynamics of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 34 ~ 45
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/ecgd/369	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Komori Yohei、Umezawa Runa、Yasui Takuro	4. 巻 16
2. 論文標題 On the area formulas of inscribed polygons in classical geometry	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Pure and Applied Mathematics Quarterly	6. 最初と最後の頁 557 ~ 572
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4310/pamq.2020.v16.n3.a8	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Komori Yohei	4. 巻 16
2. 論文標題 On finite upper half plane graphs	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Oberwolfach Reports	6. 最初と最後の頁 1054 ~ 1055
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.4171/owr/2019/17	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 -

1. 著者名 Sugawa Toshiyuki	4. 巻 147
2. 論文標題 A construction of trivial Beltrami coefficients	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Proceedings of the American Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 629 ~ 635
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1090/proc/13965	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 Reijonen Atte、Sugawa Toshiyuki	4. 巻 13
2. 論文標題 Characterizations for Inner Functions in Certain Function Spaces	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Complex Analysis and Operator Theory	6. 最初と最後の頁 1853 ~ 1871
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11785-018-0863-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Sugawa Toshiyuki、Vuorinen Matti、Zhang Tanran	4. 巻 141
2. 論文標題 On the hyperbolic distance of n-times punctured spheres	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal d'Analyse Mathematique	6. 最初と最後の頁 663 ~ 687
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11854-020-0112-9	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Golberg Anatoly、Sugawa Toshiyuki、Vuorinen Matti	4. 巻 20
2. 論文標題 Teichmüller 's Theorem in Higher Dimensions and Its Applications	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Computational Methods and Function Theory	6. 最初と最後の頁 539 ~ 558
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s40315-020-00340-x	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 SUGAWA TOSHIYUKI、VUORINEN MATTI、ZHANG TANRAN	4. 巻 174
2. 論文標題 Conformally invariant complete metrics	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society	6. 最初と最後の頁 273 ~ 300
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1017/S030500412200024X	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Nasyrov Semen、Sugawa Toshiyuki、Vuorinen Matti	4. 巻 524
2. 論文標題 Moduli of quadrilaterals and quasiconformal reflection	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 Journal of Mathematical Analysis and Applications	6. 最初と最後の頁 127092
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1016/j.jmaa.2023.127092	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Partyka Dariusz、Sakan Ken-ichi、Zhu Jian-Feng	4. 巻 43
2. 論文標題 Quasiconformal harmonic mappings with the convex holomorphic part	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Annales Academiæ Scientiarum Fennicæ Mathematica	6. 最初と最後の頁 401 ~ 418
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.5186/aasfm.2018.4326	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Partyka Dariusz、Sakan Ken-ichi	4. 巻 47
2. 論文標題 Injectivity of harmonic mappings with a specified injective holomorphic part	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Annales Fennici Mathematici	6. 最初と最後の頁 573 ~ 586
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.54330/afm.115432	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 Partyka Dariusz、Sakan Ken-ichi	4. 巻 111
2. 論文標題 Quasiconformality of harmonic mappings of the unit disk	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Current Research in Mathematical and Computer Sciences	6. 最初と最後の頁 327 ~ 352
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 Alam Md. Shafiul、Sugawa Toshiyuki	4. 巻 59
2. 論文標題 Geometric deduction of the solutions to modular equations	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 The Ramanujan Journal	6. 最初と最後の頁 459 ~ 477
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s11139-022-00604-1	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

[学会発表] 計29件(うち招待講演 19件/うち国際学会 5件)

1. 発表者名 松崎克彦
2. 発表標題 Parametrization of Weil-Petersson curves on the plane
3. 学会等名 東大複素幾何セミナー(オンライン)(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 松崎克彦
2. 発表標題 ヴェイユ・ピーターソン曲線とタイヒミュラー空間
3. 学会等名 函数論サマーセミナー(オンライン)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Katsuhiko Matsuzaki
2. 発表標題 BMO embeddings, chord-arc curves, and Riemann mapping parametrization
3. 学会等名 Computational Methods and Function Theory 2021 (online)(国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 松崎克彦, WEI Huaying
2. 発表標題 BMO embeddings, chord-arc curves, and Riemann mapping parametrization
3. 学会等名 日本数学会年会, 埼玉大学(オンライン)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 松崎克彦
2. 発表標題 弦弧曲線とタイヒミュラー空間
3. 学会等名 東工大複素解析セミナー（オンライン）（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 松崎克彦, WEI Huaying
2. 発表標題 Strongly symmetric homeomorphisms on the real line with uniform continuity
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会, 熊本大学（オンライン）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 松崎克彦, WEI Huaying
2. 発表標題 Beurling-Ahlfors extension by heat kernel, A_p -weights for VM_0 , and vanishing Carleson measures
3. 学会等名 日本数学会年会, 慶応大学（オンライン）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 松崎克彦
2. 発表標題 区分的な漸近的対称写像による普遍タイヒミュラー空間の補間
3. 学会等名 東工大複素解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松崎克彦
2. 発表標題 実軸上の普遍タイヒミュラー空間
3. 学会等名 タイヒミュラー空間と双曲幾何学 (招待講演)
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 松崎克彦
2. 発表標題 漸近的 BMO タイヒミュラー空間とカルレソン計量
3. 学会等名 東工大複素解析セミナー (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 松崎克彦
2. 発表標題 漸近的 BMO タイヒミュラー空間
3. 学会等名 日本数学会年会函数論分科会
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 松崎克彦
2. 発表標題 可積分タイヒミュラー空間の実解析的構造について
3. 学会等名 日本数学会年会, 大阪公立大学
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 松崎克彦
2. 発表標題 可積分タイヒミュラー空間の理論
3. 学会等名 拡大東工大複素解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 松崎克彦
2. 発表標題 可積分タイヒミュラー空間とベゾフ空間
3. 学会等名 関数空間を中心とした実解析・複素解析・函数解析の総合的研究
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 松崎克彦
2. 発表標題 絶対連続タイヒミュラー空間と関数空間
3. 学会等名 日本数学会年会函数論分科会特別講演，中央大学（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 松崎克彦
2. 発表標題 弦弧曲線の空間：連結性とリーマン写像の不連続性
3. 学会等名 「リーマン面・不連続群論」研究集会（招待講演）
4. 発表年 2023年

1. 発表者名 松崎克彦, WEI Huaying
2. 発表標題 Chordal Loewner chains and Teichmüller spaces on the half-plane
3. 学会等名 函数論シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 松崎克彦, WEI Huaying
2. 発表標題 Chordal Loewner chains and Teichmüller spaces on the half-plane
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会, 北海道大学
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 松崎克彦
2. 発表標題 擬等角拡張とその応用
3. 学会等名 函数論サマーセミナー (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Katsuhiko Matsuzaki
2. 発表標題 The p -integrable Teichmüller space and the variant of the Beurling-Ahlfors quasiconformal extension
3. 学会等名 The POSTECH Conference 2022 on Complex Analytic Geometry (online) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Ken-ichi Sakan
2. 発表標題 Quasiconformal harmonic mappings with the convex holomorphic part
3. 学会等名 International Symposium on Geometric Function Theory (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ken-ichi Sakan
2. 発表標題 Quasiconformal harmonic mappings with a given convex holomorphic part
3. 学会等名 Colloquium, Quanzhou Campus, Huaqiao University (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ken-ichi Sakan
2. 発表標題 A simple deformation of quasiconformal harmonic mappings with a specified holomorphic part
3. 学会等名 Geometric Function Theory and Related Topics (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Ken-ichi Sakan
2. 発表標題 A remark on Schwarz's lemma for harmonic mappings in the plane
3. 学会等名 Colloquium, Quanzhou Campus, Huaqiao University (招待講演)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 佐官謙一
2. 発表標題 A simple deformation of harmonic mappings with a specified injective holomorphic part
3. 学会等名 「リーマン面・不連続群論」研究集会（招待講演）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 K. Sakan and D. Partyka
2. 発表標題 A simple deformation of harmonic mappings
3. 学会等名 VI International Conference of Mathematics and Computer Science（招待講演）（国際学会）
4. 発表年 2020年

1. 発表者名 佐官謙一
2. 発表標題 A problem on injectivity of some harmonic mappings
3. 学会等名 島根大学複素解析 セミナー（招待講演）
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 佐官謙一
2. 発表標題 ある変形における調和な写像の単葉性
3. 学会等名 愛知工業大学複素解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2024年

1. 発表者名 佐官謙一
2. 発表標題 Quasiconformality of harmonic mappings of the unit disk
3. 学会等名 大阪公立大学 複素解析セミナー（招待講演）
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計1件

1. 著者名 新井 仁之	4. 発行年 2022年
2. 出版社 朝倉書店	5. 総ページ数 264
3. 書名 フーリエ解析とウェーブレット	

〔産業財産権〕

〔その他〕

Recent Papers https://matsuzak.w.waseda.jp/recentpapers.html
--

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究 分 担 者	新井 仁之 (Arai Hitoshi) (10175953)	早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授 (32689)	

6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究分担者	須川 敏幸 (Sugawa Toshiyuki) (30235858)	東北大学・情報科学研究科・教授 (11301)	
研究分担者	佐官 謙一 (Sakan Kenichi) (70110856)	大阪公立大学・数学研究所・特別研究員 (24405)	
研究分担者	小森 洋平 (Komori Yohei) (70264794)	早稲田大学・教育・総合科学学術院・教授 (32689)	
研究分担者	柳下 剛広 (Yanagishita Masahiro) (60781333)	山口大学・大学院創成科学研究科・講師 (15501)	削除：2019年3月31日

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
中国	江蘇師範大学			