

令和 5 年 6 月 16 日現在

機関番号：14401

研究種目：基盤研究(B) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18H01128

研究課題名(和文) 非線形波動に関連した偏微分方程式系の解の大域存在のための構造条件と漸近挙動

研究課題名(英文) Structural conditions for global existence of solutions and the asymptotic behavior of global solutions for systems of nonlinear partial differential equations related to nonlinear waves

研究代表者

片山 聡一郎 (Katayama, Soichiro)

大阪大学・大学院理学研究科・教授

研究者番号：70283942

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 6,500,000円

研究成果の概要(和文)：単一速度の半線形波動方程式系に対して知られていた、いくつかの“弱”零条件下での大域解の存在定理を、2次元と3次元空間における単一速度の準成型波動方程式系、および2次元空間における多重速度をもつ半線形波動方程式系の場合に拡張した。3次元空間における多重速度をもつ半線形波動方程式系、および波動とクライン=ゴルドン方程式の連立系に対しても“弱”零条件下での解の大域存在を示したが、若干の技術的な付加条件を課さざるを得なかった。上記の方程式系、および非線形シュレディンガー方程式系に対して“弱”零条件下での大域解の漸近挙動についての結果も得た。

研究成果の学術的意義や社会的意義

いくつかの偏微分方程式系に対して、従来よりも弱い条件下での大域解の存在定理を得ることができた。また、大域解の漸近挙動についても研究し、小さい初期値の場合であっても、解が自由解に漸近する以外に、エネルギーが増加もしくは減少したり、特定の成分にエネルギーが集中したりするなど様々な挙動が起こりうることが明らかになった。また従来は解が自由解に漸近するかどうかに興味をもたれていたが、自由解に漸近する場合にも、自由解の初期値が元の初期値とはかけ離れたものになる現象が起こり得ることが明らかになった。これらの結果は非線形偏微分方程式の理解に新たな知見を与えている。

研究成果の概要(英文)：We have extended the global existence results for systems of semilinear wave equations with single-speed under some "weak" null conditions to systems of quasi-linear wave equations in two and three space dimensions, and to systems of semilinear wave equations with multiple-speed in two space dimensions. We have also obtained global existence for systems of semilinear wave equations, and systems of wave and Klein-Gordon equations in three space dimensions under a kind of "weak" null condition with some technical additional assumptions. We examined the asymptotic behavior of global solutions under "weak" null conditions for the above mentioned systems, as well as systems of nonlinear Schroedinger equations.

研究分野：非線形偏微分方程式

キーワード：非線形波動方程式系 非線形シュレディンガー方程式系 非線形クライン=ゴルドン方程式系 大域解 漸近挙動 零条件 弱零条件

### 1. 研究開始当初の背景

十分滑らかで台がコンパクトな初期値に対する非線形波動方程式系の初期値問題を考える。滑らかな非線形項を考えると、ある時刻までの解(局所解)の存在は、古典的によく知られている。他方、任意の時刻までの解(大域解)は一般には必ずしも存在しない。

大域解の存在を保証する条件は様々な要素が絡み合った複雑なものとなるが、自明解(零解)をもつような方程式の場合には、非線形項の大きさを小さいものに制限すれば状況は単純になる。以下、初期値は十分小さいもののみを考える。この場合、大域解の存在と非存在を判定する最も単純な指標は非線形項の次数である。初期値が小さいとき、少なくとも短時間は解も小さいままであると考えられる。そのため非線形項の次数が高いほど非線形項の影響は小さくなり、大域解が存在しやすくなると予想できる。これは実際に正しく、ある次数(臨界次数)よりも非線形項の次数が真に大きいときには、小さな初期値に対しては大域解が存在することが1980年代に示されている。臨界次数は考えている空間の次元などに依存して異なる値になる。例えば未知関数の導関数のみに非線形項が依存する場合、2次元空間では3次、3次元空間では2次が臨界次数である。他方、空間次元が4以上の場合には、2次以上の一般の非線形項が優臨界となる。したがってこのような非線形波動方程式系に対しては臨界次数を考える意味があるのは2次元および3次元空間の場合である(1次元空間の場合も意味があるが、解の減衰が全く期待できないなど状況が大きく異なるので、ここでは考えない)。

臨界次数の非線形項の場合には、非線形項の形に応じて大域解が存在する場合と存在しない場合の双方が起こり得る。したがって臨界次数の場合に大域解の存在を保証するような非線形項の構造条件を見出すことは重要かつ興味深い問題である。1986年に3次元空間の場合に Klainerman により導入された零条件(null condition)はこのような構造条件のひとつである。研究代表者らにより2次元空間の場合にも零条件は拡張されている。零条件の下での大域解は、時間が無限大になるとき、自由解(非線形項をもたない線形波動方程式の解)に漸近することも分かる。漸近先の自由解の初期値(以下、漸近初期値と呼ぶ)は、非線形問題の初期値に非線形項の影響を繰り込んだものとなるが、零条件下では初期値が小さくなると、漸近初期値は相対的に元の初期値に近くなることも知られている。

零条件は小さな初期値に対して大域解が存在するための十分条件ではあるが必要条件ではない。非線形項が未知関数の1階導関数のみに依存する半線形波動方程式系の場合には2000年代に入って、零条件よりも弱い条件(以下、“弱”零条件と総称する)の下で大域解の存在が得られた。“弱”零条件にはいくつかのタイプがあり、Alinhac はアインシュタイン方程式の構造をヒントにした条件を導入した。他方、研究代表者と砂川氏らは非線形消散項を取り込むような形の条件を導入した(後者は片山=的場=砂川、および片山=松村=砂川において扱われていたので KMS 型の“弱”零条件と呼ぶことにする)。

ここまで非線形波動方程式に限定して状況を述べたが、非線形シュレディンガー方程式や非線形クライン=ゴルドン方程式に対しても同である。ただし、これらの方程式系に対しては解の減衰の速さが波動方程式とは異なるため、1次元空間で3次、2次元空間で2次が臨界次数になる。空間次元が3以上の場合には2次以上の非線形項は全て優臨界である。

臨界次数の非線形項をもつシュレディンガー方程式に対する零条件は研究代表者と堤氏、砂川氏、池田氏らとの共同研究で得られている。またクライン=ゴルドン方程式に対しても研究代表者と小沢氏、砂川氏との共同研究や Delort-Fang-Xue などにより零条件に対応する条件が得られている。またこれらの方程式系に対しても“弱”零条件に対応する結果もいくつか知られている。

### 2. 研究の目的

非線形波動方程式、非線形シュレディンガー方程式、非線形クライン=ゴルドン方程式などの非線形波動に関連する偏微分方程式系の小さな初期値に対する初期値問題を考察し、先行研究で得られた結果をさらに発展させ、これまでに扱われていなかったような場合に零条件よりも弱い大域解存在のための様々な十分条件を導入して、その条件下での大域解の漸近挙動を明らかにすることを目的とする。

### 3. 研究の方法

非線形波動方程式と非線形シュレディンガー方程式は線形偏微分方程式論の観点からは異なる型の方程式であり、解の挙動も全く異なるものであるが、解の挙動を考慮に入れて適切に解の主要部を抜き出すことにより、主要部が従うと想定される簡約化された方程式系をもとの偏微分方程式系から得ることができ、臨界次数の場合にはこれらの方程式系は同一のものとなる。この簡約化方程式を用いて大域解の存在条件や解の漸近挙動を統一的に得る方法を開発することを目指す。

#### 4. 研究成果

本研究で得られた成果は以下の通りである。

##### (1) 準線形波動方程式系について

非線形偏微分方程式系で未知関数および、その1階および2階偏導関数に非線形項が依存する場合を考察した。非線形項が2階偏導関数については線形に依存する場合を準線形といい、2階偏導関数には依存しない場合を半線形という。半線形の場合の Alinhac 型の“弱”零条件を2次元空間および3次元空間での臨界次数の非線形項をもつ準線形波動方程式系に対して拡張した。3次元空間での大域解の存在については肥田野氏と横山氏による先行研究で得られた結果の拡張にもなっている。半線形の場合には簡約化方程式系が常微分方程式系になるのに対して、この場合には簡約化方程式系が1階の偏微分方程式系になるところが困難な点である。簡約化方程式系が偏微分方程式1つと、いくつかの常微分方程式の連立系になるという付加条件の下で大域解の漸近挙動を表す公式も得た。また、ここで扱う“弱”零条件の下では、大域解が漸近自由になり、さらに初期値の大きさが小さいときに漸近初期値がもとの初期値に近くなるのは零条件が満たされる場合に限られることも示した。

##### (2) 多重速度をもつ半線形波動方程式系について

成分ごとに伝播速度が異なる半線形波動方程式系(以下、多重速度をもつ半線形波動方程式系と呼ぶ)に対しては、いわゆるベクトル場の方法を用いる場合、ローレンツ・ブーストと呼ばれるものが使えないという技術的な困難があるが、先行研究において久保氏と星賀氏(2次元空間)、横山氏(3次元空間)によって零条件が得られていた。本研究では単一速度の場合に得られていた KMS 型の“弱”零条件を多重速度をもつ場合に拡張することを考えた。2次元空間においては、多重速度の場合への KMS 型“弱”零条件の自然な拡張を得ることができた。また、若干の付加条件の下で、大域解の漸近挙動を表す公式を得た。この結果により、異なる伝播速度をもつ成分の影響は小さく、漸近挙動の分類のためには同一の伝播速度をもつ成分のみに着目すればよいことが明らかになった。3次元空間の場合には、残念ながら技術的な困難を完全には解決できず、非線形項が未知関数の時間微分のみ依存するという付加条件がついてしまった。この点の改良は今後の課題である。なお、いずれも程 明港氏との共同研究である。

##### (3) 半線形クライน์=ゴールドン方程式と半線形波動方程式の連立系

波動方程式とクライน์=ゴールドン方程式の連立系をベクトル場の方法を用いて扱うとき、スクエリング作用素と呼ばれるものを使うことができないという(2)と同様の技術的な困難が発生する。しかし研究代表者の先行研究により、3次元空間の場合には自然な形の零条件が導入されている。本研究では3次元空間において零条件を KMS 型の“弱”零条件に弱めるという問題を考えた。技術的な困難を完全には解決できず、非線形項が未知関数の空間微分のみ依存するという付加条件の下で、KMS 型の“弱”零条件の下での解の大域存在を示すことができた。本研究も程 明港氏との共同研究である。なお、空間2次元の場合には程 明港氏により、KMS 型の“弱”零条件下での大域解の存在定理は満足できる形で得られていることを付記しておく。

##### (4) 非線形シュレディンガー方程式系について

ゲージ不変な非線形シュレディンガー方程式系に対しては、零条件を弱めて、KMS 型の“弱”零条件の下で大域解が存在することが砂川氏らの先行研究により得られていた。ここでは、この“弱”零条件の下での大域解の漸近挙動を簡約化方程式系の解を用いて表す公式を空間1次元および2次元の場合に得た。技術的な困難により、1次元空間の場合にはやや強い条件の下で漸近挙動を得ている。この結果によりこれまでに得られていた漸近挙動に関する結果を一定程度は統一的に理解することが可能になった。また、応用として Colin-Colin により提唱されていたプラズマを記述するモデル方程式に対して、大域解は漸近自由にならないことを明らかにした。本研究は迫田 大輔氏との共同研究である。

##### (5) 安定な漸近自由解をもつ非線形項の特徴づけについて

臨界次数をもつ2もしくは3次元空間における半線形波動方程式系、および1もしくは2次元空間における半線形シュレディンガー方程式系に対する初期値問題を考える。この場合、先行研究によって KMS 型の“弱”零条件の下での大域解の存在が知られている。また波動方程式に対しては先行研究において、シュレディンガー方程式に対しては上記(4)において、大域解の漸近挙動を簡約化方程式系の解を用いて記述する公式が得られている。ただし、技術的な困難により、波動方程式で2次元空間、およびシュレディンガー方程式で1次元空間の場合には KMS 型の“弱”零条件をやや強めた条件下でのみ漸近挙動を表す公式が得られている。本研究では、KMS 型の“弱”零条件の下で、付加条件なしに漸近挙動に関する情報を得ることを試みた。得られた結果としては、KMS 型の“弱”零条件を大前提とした場合、大域解が自由解に漸近して、さらに初期値が小さくなるときに、漸近初期値が元の初期値に常に近づくのは、零条件が満たされるとき、そのときに限ることを示した。また大域解が自由解に漸近するとき、漸近初期値は非線形項から決まるある条件を満たさなければならないことも明らかにした。

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計5件（うち査読付論文 5件／うち国際共著 0件／うちオープンアクセス 0件）

|  |                         |
|--|-------------------------|
| 1. 著者名<br>Minggang Cheng and Soichiro Katayama   | 4. 巻<br>-               |
| 2. 論文標題<br>Remarks on weaker null conditions for two kinds of systems of semilinear wave equations in three space dimensions | 5. 発行年<br>2023年         |
| 3. 雑誌名<br>Hokkaido Mathematical Journal  | 6. 最初と最後の頁<br>-         |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>なし  | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>-               |
| 1. 著者名<br>Minggang Cheng and Soichiro Katayama   | 4. 巻<br>21              |
| 2. 論文標題<br>Systems of semilinear wave equations with multiple speeds in two space dimensions and a weaker null condition     | 5. 発行年<br>2022年         |
| 3. 雑誌名<br>Communications on Pure and Applied Analysis  | 6. 最初と最後の頁<br>3117-3139 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.3934/cpaa.2022092  | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>-               |
| 1. 著者名<br>片山聡一郎  | 4. 巻<br>73              |
| 2. 論文標題<br>非線形波動方程式系に対する零条件とその周辺   | 5. 発行年<br>2021年         |
| 3. 雑誌名<br>数学   | 6. 最初と最後の頁<br>380-404   |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>なし  | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>-               |
| 1. 著者名<br>Soichiro Katayama and Daisuke Sakoda   | 4. 巻<br>1               |
| 2. 論文標題<br>Asymptotic behavior for a class of derivative nonlinear Schroedinger systems                                      | 5. 発行年<br>2020年         |
| 3. 雑誌名<br>SN Partial Differential Equations and Applications   | 6. 最初と最後の頁<br>12        |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子）<br>10.1007/s42985-020-00012-4  | 査読の有無<br>有              |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>-               |

|  |                 |
|--|-----------------|
| 1. 著者名<br>Soichiro Katayama  | 4. 巻<br>-       |
| 2. 論文標題<br>Global existence and the asymptotic behavior for systems of nonlinear wave equations violating the null condition | 5. 発行年<br>2020年 |
| 3. 雑誌名<br>Advanced Studies in Pure Mathematics   | 6. 最初と最後の頁<br>- |
| 掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子)<br>なし   | 査読の有無<br>有      |
| オープンアクセス<br>オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難   | 国際共著<br>-       |

〔学会発表〕 計5件 (うち招待講演 5件 / うち国際学会 2件)

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Soichiro Katayama   |
| 2. 発表標題<br>Systems of semilinear wave equations with multiple speeds in two space dimensions and a weaker null condition |
| 3. 学会等名<br>第14回名古屋微分方程式研究集会 (招待講演) (国際学会)  |
| 4. 発表年<br>2023年  |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>片山聡一郎                                    |
| 2. 発表標題<br>臨界次数をもつ非線形波動・シュレディンガー方程式系の大域解の漸近挙動 I, II |
| 3. 学会等名<br>PDE Workshop in Miyazaki (招待講演)          |
| 4. 発表年<br>2020年                                     |

|   |
|---|
| 1. 発表者名<br>片山 聡一郎   |
| 2. 発表標題<br>Asymptotic behavior for a class of derivative nonlinear Schroedinger systems |
| 3. 学会等名<br>九州関数方程式論セミナー (招待講演)  |
| 4. 発表年<br>2019年   |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>片山 聡一郎  |
| 2. 発表標題<br>零条件を満たさない準線形波動方程式系の全域解の漸近挙動                             |
| 3. 学会等名<br>Nonlinear Dispersive Equations in Kumamoto, 2019 (招待講演) |
| 4. 発表年<br>2019年  |

|  |
|--|
| 1. 発表者名<br>Soichiro Katayama   |
| 2. 発表標題<br>Global existence and the asymptotic behavior for systems of nonlinear wave equations violating the null condition |
| 3. 学会等名<br>The Role of Metrics in the Theory of Partial Differential Equations (招待講演) (国際学会)                                 |
| 4. 発表年<br>2018年  |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

| 氏名<br>(ローマ字氏名)<br>(研究者番号) | 所属研究機関・部局・職<br>(機関番号) | 備考 |
|---------------------------|-----------------------|----|
|---------------------------|-----------------------|----|

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計2件

|   |                    |
|---|--------------------|
| 国際研究集会<br>The 17th Linear and Nonlinear Waves | 開催年<br>2019年～2019年 |
| 国際研究集会<br>The 16th Linear and Nonlinear Waves | 開催年<br>2018年～2018年 |

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|---------|---------|