様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９　（共通）

科学研究費助成事業　　研究成果報告書

令和　４ 年　 ６ 月 ２７ 日現在

機関番号：１２７０３
研究種目：基盤研究(B)（一般）
研究期間：2018～2020
課題番号：１８Ｈ０３２０６

研究課題名（和文）求解困難な半正定値計画問題と２次錐計画問題への挑戦

研究課題名（英文）Challenge to Intractable Semidefinite and Second-order Cone Programs

研究代表者
土谷　隆（Takashi, Tsuchiya）

政策研究大学院大学・政策研究科・教授

研究者番号：００１８８５７５

交付決定額（研究期間全体）：（直接経費）　　13,100,000円

研究成果の概要（和文）：2次錐計画問題や半正定値計画問題は凸錐上の線形計画問題であり近年広く使われている．主問題・双対問題共に内点実行可能な問題を正則な問題といい，正則な問題は内点法等で解ける．本課題では正則でない問題の解法を研究した．正則な問題の最適解を返すオラクルを内点オラクルとして定義し，半正定値計画問題や一般の凸錐上の線形計画問題が内点オラクルを有限回(次元の多項式回)呼び出せば完全に解けることを示した．非正則半正定値計画問題を摂動して正則化した時の最適値の振舞いを解明し，内点法を主・双対問題の最適値が一致しない半正定値計画問題に適用した時に，それが両問題の最適値の間の値に収束する点列を生成することを示した．

研究成果の学術的意義や社会的意義
本研究により，悪条件半正定値計画問題や凸錐上の線形計画問題の構造解析が大きく進展した．まず，任意の半正定値計画問題や凸錐上の線形計画問題を，理想化された内点法によって完全に解くことができることが証明された．さらに，代数幾何を用い，長年未解決であった，強双対定理が成立しないような悪条件半正定値計画問題の摂動解析を行うことにも成功した．そして，その結果を活用して，半正定値計画問題に対する内点法が従来認識されていた以上に強力な解法で「任意の問題に適用した時に(ある種の)大域的収束性を有する」ことを明らかにした．

研究成果の概要（英文）：Semidefinite Programming (SDP) and and Second-order Cone Programming (SOCP) are examples of linear programming (LP) over convex cones with many applications. We say a problem is regular if it has interior-feasible solutions on both primal and dual side. Otherwise the problem is called singular. While good algorithms exist for regular problems, it is harder to solve singular problems. We studied singular problems to obtain three major results. First, we showed that any LP over convex cones (LPC) can be solved completely by calling interior-point oracle finitely many times, where interior-point oracle returns an optimal solution for a given regular LPC. Second, we analyzed change of the optimal value when a singular SDP is perturbed to make it regular. Third, as an application of the second result, we demonstrated that if the interior-point algorithm is applied to a SDP with nonzero duality gap, it generates a sequence converging to a value between primal and dual optimal values.

研究分野：数理工学・統計数理

キーワード：半正定値計画問題　2次錐計画問題　双対定理　双対ギャップ　内点法　線形計画問題　悪条件

様　式　Ｃ－１９、Ｆ－１９－１、Ｚ－１９（共通）

１．研究開始当初の背景

1947 年に J.B.Dantzig による単体法の提案と共に実用化された線形計画問題は，アフィン空間と第一象限という凸錐上の交わりで線形関数を最適化する問題であるが，数理的にも豊富な構造を持つ一方，モデリングの道具としても強力であった．20 世紀末から 21 世紀の初頭にかけて数理最適化の分野では，線形計画法における第一象限を半正定値対称錐や 2 次錐で置き換えて定義される，半正定値計画問題や 2 次錐計画問題といった，凸錐上の線形計画問題が実用化されつつあった．これらの問題は，線形計画問題の拡張として，より強力なモデリングを行うための自由度を有している一方，その非線形性のために，悪条件となり，求解はより困難である．線形計画問題の場合には解法技術の完成度が高く，モデル化された問題は求解ソフトウェアを使って自動的に解けるが，半正定値計画問題や 2 次錐計画問題はまだその域に達しているとはいえない状況である．そこで，凸錐上の線形計画問題に関わる「モデリング・数理・アルゴリズム」の研究をさらに深化させて，技術としての完成度を高めて線形計画問題のレベルに近づける必要がある，という状況であった．

２．研究の目的

本研究では，上述の問題意識の下に，以下の重要と思われる課題を設定して研究を行った．(A) 半正定値計画問題と 2 次錐計画問題の新多項式時間解法「正射影スケーリング法」の開発と展開；(B) 正則性を必要としない頑健な半正定値計画問題と２次錐計画問題の解法の構築；(C) von Neumann エントロピー最適化問題の多項式時間解法の自動微分による実用化; (D) 情報幾何による半正定値計画問題に対する一次法の開発と大規模共分散推定への活用．これらの課題は，研究代表者が過去に研究成果を挙げてきているものであり，さらにこれを発展させるとともに，その文脈の中で，従来は悪条件で求解困難であった問題を解くための方法論を展開することが目的であった．

３．研究の方法

定期的に対面や ZOOM 等を用いて分担者や関連分野研究者と議論し，メール等でもアイディアを交換した．また，数値実験も行った．

４．研究成果

上記(A)から(D)のプロジェクトの内，特に(B)の正則性を必要としない頑健な半正定値計画問題と 2 次錐計画問題の解法の構築については研究が大きく進展し，特筆すべき成果が得られたので，これを中心に以下詳述する．具体的に得られた結果は次の通りである：

1. 内点法オラクルによる，任意の半正定値計画問題および凸錐上の線形計画問題の解法の構築
2. 双対ギャップが存在する半正定値計画問題を摂動した時の最適値の振る舞いの解明
3. 任意の半正定値計画問題に対する主双対内点法の収束性の証明
4. より一般的な凸錐上の線形計画問題に対する摂動および誤差解析

これらは，悪条件性を持つ半正定値計画問題や凸錐上の線形計画問題に関する基本的問題にアプローチしたもので，着実な研究の進展があったといえる．特に 2 と 3 については，ささやかながらも，<u>双対理論という，最適化の根幹となる基本的分野において，新しい視点に立ち，既存の研究者が予期しないような，独自性と重要性の高い成果を導くことができた</u>のではないか，と自負している．

半正定値計画問題は，アフィン集合と半正定値対称行列錐の交わる集合上で線形目的関数を最適化する，以下のような問題である．

$$(\mathrm{P})\ \ \text{minimize } C\cdot X \text{ subject to } A_i\cdot X = b_i,\ i=1,\cdots,n,\ X\geqq 0$$

ここで，「・」は対称行列の内積で，$C\cdot X=\Sigma C_{ij}X_{ij}$として定義され，$X\geqq 0$ は行列 X が半正定値対称であることを表す．(P)を主問題といい，その双対問題(D)は以下のように定義される．

$$(\mathrm{D})\ \ \text{maximize } b^T y \text{ subject to } C - \Sigma A_i y_i = S,\ S\geqq 0$$

(P)と(D)の実行可能性については，必ず次の 4 つのうちの一つが成立する．強実行可能(正定値実行可能解を持つ)，弱実行可能(実行可能解は持つが半正定値条件を正定値で満たすものはない)，弱実行不能(実行可能解はないが，半正定値条件を少しでも緩和した問題には実行可能解が存在する)，強実行不能（実行可能解は存在しないし半定値条件を有限だけ緩和しても実行可能にはできない）の 4 つの場合が存在する．

主問題と双対問題が共に内点実行可能解（(P)においては X が，(D)においては S が正定値であ

るような実行可能解）を有する場合を正則な半正定値計画問題と呼ぶことにする．正則な半正定値計画問題では主問題と双対問題の最適値が一致し，最適値も存在し，内点法によって解けることが知られている．一方，正則でない場合には，最適値が漸近的にしか達成されず，最適解が存在しない，あるいは，主問題と双対問題の最適値が一致せず，正の双対ギャップが存在する，あるいはその両方が起こる；などの困難な状況が存在する． 行列 X に対する半正定値制約は X が対称行列で固有値が 0 以上である，という制約であるが，これを，X が対称行列でその最小固有値が-ε以上である，という制約に緩めたものを，ε緩和と呼ぶことにする．以上で準備が整ったので，本研究課題で得られた結果について述べる．

１．内点法オラクルによる，任意の半正定値計画問題および凸錐上の線形計画問題の解法の構築（雑誌論文リスト[1]）

本結果は凸錐上の線形計画問題に対しても成立するが，ここでは半正定値計画問題の場合について説明して，最後に一般の凸錐上の線形計画問題の場合を補足的に述べる．

半正定値計画問題は，正則であれば内点法によって解くことができるが，一般には問題が強/弱実行可能，強/弱実行不能の４つの状態のいずれにあるかが事前に判ることはないので，どのような問題が与えられても，内点法を使って問題を解くことができるかどうか？ということは自明ではなく,解明しておくべき基本的な問題である.そこで「半正定値計画問題を完全に解く」ことを，

「与えられた半正定値計画問題の実行可能性が４つのいずれの状態であるかを判定し，実行可能であれば，（最適値が非有界な場合も含め）最適値を求める．さらに，最適解が存在する場合には最適解を求め，存在しない場合には，任意の与えられたεについて，目的関数値と真の最適値の差がε以下の近似最適解を求める．また，弱実行不能な場合には，任意の与えられたεについて，半正定値制約をεだけ緩和した問題の実行可能解を求める」

こととして定義する．また，内点法を理想化したものとして「正則な半正定値計画問題(P)と(D)が与えられた時にこれらの問題の最適解を与えるオラクル」を考え，これを「内点オラクル」と呼ぶ. そして, 内点オラクルを呼ぶだけで半正定値計画問題が完全に解けるかどうか？という問題設定を行い，肯定的な答えを得たのが雑誌論文リスト[1]の論文である.

本研究以前より, 非正則な半正定値計画問題を扱う手法として, 面縮小法という方法が知られていた. 弱実行可能な半正定値計画問題は, 実行可能領域を含む最小次元のアフィン空間を求めることができれば, 直ちに強実行可能問題に変換できる. 面縮小法は, 補助半正定値計画問題を解くことにより「問題が実行可能であるとすれば実行可能領域を含むことが保証される，より次元の低いアフィン空間を求める」ことを繰り返す. この手法を適用する上では次の３つの問題点があった.

(i) 上記の補助半正定値計画問題が元の半正定値計画問題に対して解きやすいより易しい問題となるかどうかが明確でない.

(ii) 実行可能な問題に対して面縮小法を行うと，結果として得られた半正定値計画問題は強実行可能問題とはなるが，その双対問題が強実行可能である保証はなく，したがって，正則になるとは限らず，内点法が適用できない.

(iii) 問題が実行可能な場合の解析しか行われてこなかった.

本研究では, (i)については, 正則な補助半正定値計画問題で「それを解くことにより, (a) 問題が強実行可能であればその実行可能解を求めることができ，(b)実行可能領域を含むさらに次元の低いアフィン空間を構築するためのベクトルを得ることができるか，(c)元の問題が実行不可能であることを判定できるもの」が存在することを示した. (ii)については「面縮小法で得られた強実行可能問題の双対問題に対して面縮小法を行うと，得られた問題は正則な問題となり，内点オラクルを用いてその最適値を求めることができること」を示した. つまり，2 回面縮小法を行えば, 内点オラクルのみを用いて, 元の問題の最適値を得られることがわかる. 我々はこれを二重面縮小法と名付けた. (iii)については，二重面縮小法によって，元の問題が 4 つの実行可能性のいずれに該当あるかを判定できることを示した. さらに, 漸近的にしか最適値が実現できない場合, 面縮小法の過程で得られたベクトルを用いて, 新しい半正定値計画問題を解くことなく, 任意の精度の近似最適解を得る手続きを示した. 結果として, 内点オラクルを(高々)問題の次元の多項式回呼べば，任意の半正定値計画問題を完全に解けることが分った.

ここでは得られた成果を内点オラクルに対応する具体的アルゴリズムとしての内点法が存在する半正定値計画問題について記述されているが, 内点オラクルが利用可能である, という前提の下では凸錐上の線形計画問題についても一般化可能なので，本論文ではそのような形で理論を構築している．ただし，問題に応じた内点オラクルの構築を行う必要はある.

２．双対ギャップが存在する半正定値計画問題を摂動した時の最適値の振る舞いの解明(参考文献[T1])

悪条件の半正定値計画問題に対して内点法を適用するためのもう一つの方法は，問題を摂動することである．主問題と双対問題を共に摂動（緩和）することにより内点法を適用できる．こ

のアプローチをとる場合，摂動した問題の最適値の振舞が摂動法を適用する上での基本的問題となる.「摂動が小さい場合には元の問題と摂動した問題の最適値が近い」ことが示されないと，摂動法の適用は正当化できない．この解析は困難であるとされ，任意の問題に適用できるような一般性のある結果はこれまで存在しなかった．本研究では参考文献[T1]において，摂動が小さい時の最適値関数の振舞いを解析し，その主要な性質を新たに明らかにした．主問題の最適値を vp^*，双対問題の最適値を vd^* と記す.

主問題の半正定値条件を η 緩和，双対問題の半正定値条件を ε 緩和した時の最適値をそれぞれ $vp(\eta)$，$vd(\varepsilon)$ と記すことにする．また，主問題の半正定値条件を η 緩和し，双対問題の半正定値条件を ε 緩和した時の最適値を $v(\varepsilon,\eta)$ と記すことにする．より具体的には緩和した問題 $(P_{(\varepsilon,\eta)})$，$(D_{(\varepsilon,\eta)})$ は以下のように書ける.

$(P_{(\varepsilon,\eta)})$ minimize $(C+\varepsilon I)\cdot X$ subject to $A_i\cdot X = b_i+\eta A_i\cdot I$, $i=1,\cdots,n$, $X\geqq 0$,

$(D_{(\varepsilon,\eta)})$ maximize $\Sigma(b_i+\eta A_i\cdot I)y_i$ subject to $(C+\varepsilon I) - \Sigma A_i y_i = S$, $S\geqq 0$.

緩和前の元の主問題の最適値 $vp(0)$，双対問題の最適値は $vd(0)$ となる．双対ギャップがなければ $vp(0)=vd(0)=v(0,0)$ となるが，正の双対ギャップが存在する場合，$vp(0)>vd(0)$ となり，その場合，$v(0,0)$ は $vp(0)$ あるいは $vd(0)$ となり定義不能となる．一方，(ε,η) が正であれば問題は正則なので，(ε,η) がいくら $(0,0)$ に近くても必ず $v(\varepsilon,\eta)$ の値は定まる．したがって，正の双対ギャップがあるような問題における，原点 $(0,0)$ の近傍での $v(\varepsilon,\eta)$ の振舞いは相当に奇妙なものであることが予想され，その解析は摂動法の適用において重要であるにもかかわらず，困難であるとされてきた．本研究では，代数幾何の Tarski-Seidenberg の定理を用いてこの関数が原点近傍で以下のような興味深い性質を有することを明らかにした.

(1) $\eta\to 0$ で $v(0,\eta)=vp(\eta)$ は vd^* に収束する．$\varepsilon\to 0$ で $v(\varepsilon,0)=vd(\varepsilon)$ は vp^* に収束する.
(2) $v^*(\theta)=\lim_{t\downarrow 0} v(t\cos\theta,\ t\sin\theta)$ と定義すると，v^* は $\theta\in[0,\pi/2]$ で定義され，$v^*(0)=vd^*$，$v^*(\pi/2)= vp^*$ となる単調減少関数で，さらに，両端以外では連続である．端点で不連続な例も存在する．(この性質は，$v(\varepsilon,\eta)$ は (ε,η) が原点に第一象限内の任意の一定方向から近づく時に方向極限を持つことを示している．)

(1),(2)は「半正定値計画問題を摂動して正則化して解く時に認識しておくべき基本的結果である」と位置づけられる．さらに，この結果を活用することで，以下 3 に述べる新しい結果が得られた.

３．任意の半正定値計画問題に対する主双対内点法の収束性の解析(参考文献[T1])

半正定値計画問題を解く上での基本的解法は主双対内点法である．正則な問題に対する主双対内点法は，主問題，双対問題共通の最適値に収束する目的関数値の列を生成し，点列の任意の集積点は主問題，双対問題の最適解であることが知られている．しかしながら，正則でない問題に適用した時の収束性についてはほとんど解析されてこなかった．前項２で得られた結果を用いると，任意の半正定値計画問題に対して主双対内点法の収束性を解析することが可能になり，以下のような結果が得られた.

(1) 双対ギャップ $X\cdot S$ が 0 に収束しない場合，主問題と双対問題のいずれかが強実行不能である.
(2) 双対ギャップ $X\cdot S$ が 0 に収束する場合，主問題も双対問題も実行可能か弱実行不能である．アルゴリズムは主問題の最適値と双対問題の最適値の間の値に収束する点列を生成する．ここで，主問題が弱実行不能な場合は最適値は $+\infty$，双対問題が弱実行不能な場合は最適値は $-\infty$ とする.
(3) アルゴリズムの初期点を調整して，生成される点列を主問題の最適値あるいは双対問題の最適値どちらに近づけるかをある程度調整可能である.

(2)は，応用においてしばしば現れる弱実行可能な半正定値計画問題に対して主双対内点法を適用した場合，生成される点列から最適値が得られることを示している.

４．凸錐とアフィン空間の交わりに関する誤差評価([雑誌論文リスト[2])

凸錐上の線形計画問題の実行可能領域や最適解の集合は，閉凸錐とアフィン空間との交わりで表現できる．そのため，アフィン空間を摂動した時に，交わりの部分がどのような影響を受けるかを解析することは重要である．この解析は誤差評価とか摂動解析等と呼ばれる．従来，何も

仮定をおくことなく誤差評価を行うことは困難であった. 本解析では, 半正定値対称行列錐を含む恭順錐と呼ばれる新たなクラスの錐を定義し, 仮定を置かずに誤差解析を行うことに成功した.

閉凸錐 C とアフィン空間 A の交わり C∩A が空でないとする. 近似解 x'が与えられた時に, この近似解が, 凸円錐(C+c)とアフィン空間を摂動したもの(A+a)の交わりに属する時に, すなわち, x'∈(C+c)∩(A+a)である時に, C∩A までの距離を c と a を用いて評価する問題, すなわち,

$$\text{minimize } \|x - x'\| \text{ subject to } x' \in C\cap A \qquad (*)$$

を, 摂動 c と a の大きさを用いて評価する問題は, 誤差評価の問題といわれ, 一般の悪条件凸錐上の線形計画問題を扱う上で重要な基本的問題である. 特に, C∩A が C の内点を含まない場合には評価が難しい. この問題について, これまで扱われてきた半正定値対称行列錐を含む恭順錐という錐のクラスを導入し, C が恭順錐であれば, 特に限定的な仮定を置くことなく, 錐 C の性質のみに依存する c と a の関数として(*)の値の上からの評価（誤差評価）を与えることができることを示した. 恭順錐は, F を C の任意の面として, span(F)上の任意の点 x について, dist(x, F)≦κdist(x,C) となるような定数κが存在する錐として定義される.

５. その他の成果について

各分担者はその他, 本研究課題に関連した研究を進め, 非正則で主問題と双対問題の最適値が一致しない半正定値計画問題の構造解析(参考文献[B1]), 情報幾何における 2 重自己平行空間の性質(雑誌論文リスト[4])や線形計画問題に対する LP Newton method の解析について成果(雑誌論文リスト[3])を得た. また, 密接に関連する分野である線形計画法の概説を執筆した(雑誌論文リスト[5]). なお, 2 と 3 で述べた成果はさまざまな視点から拡張が可能であると見込まれており, 現在さらに研究を継続して進めているところである.

参考文献

[B1] Lourenco F. Bruno, Masakazu Muramatsu and Takashi Tsuchiya: Duality Theorem in Semidefinite Programming Revisited: Most Primal-Dual Weakly Feasible Semidefinite Programs Have Non-Zero Duality Gap. 最適化：モデリングとアルゴリズム 31 (統計数理研究所共同研究リポート No.420), pp.1-20.

[T1] Takashi Tsuchiya, Lourenco F. Bruno, Masakazu Muramatsu and Takayuki Okuno: A Limiting Analysis on Regularization of Singular SDP and its Implication to Infeasible Interior-point Algorithms. arXiv:19.09696, December 2019, Revised May 2021 (Mathematical Programming に投稿中).

５．主な発表論文等

〔雑誌論文〕　計5件（うち査読付論文　4件／うち国際共著　0件／うちオープンアクセス　1件）

１．著者名 Bruno F. Lourenco, Masakazu Muramatsu, Takashi Tsuchiya	４．巻 36
２．論文標題 Solving SDP completely with an interior point oracle	５．発行年 2021年
３．雑誌名 Optimization Methods and Software	６．最初と最後の頁 425-271
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1080/10556788.2020.1850720	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 －

１．著者名 Bruno Figera Lourenco	４．巻 168
２．論文標題 Amenable cones: error bounds without constraint qualifications	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Mathematical Programming Series A	６．最初と最後の頁 1-48
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10107-019-01439-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Noriyoshi Sukegawa and Tomonari Kitahara	４．巻 81
２．論文標題 A Simple Projection Algorithm for Linear Programming Problems	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Algorithmica	６．最初と最後の頁 167-181
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s00453-018-0436-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

１．著者名 Ohara Atsumi	４．巻 11712
２．論文標題 Doubly Autoparallel Structure on Positive Definite Matrices and Its Applications	５．発行年 2019年
３．雑誌名 Geometric Science of Information (Frank Nielsen and Frederic Barbaresco eds.) Springer Lecture Notes in Computer Science	６．最初と最後の頁 251-260
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-030-26980-7_26	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 －

1．著者名 土谷隆	4．巻 2
2．論文標題 線形計画法のアルゴリズムとその周辺	5．発行年 2022年
3．雑誌名 20世紀のトップ10アルゴリズム（張招良編），計算科学講座，共立出版	6．最初と最後の頁 41-84
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕　計11件（うち招待講演　5件／うち国際学会　8件）

1．発表者名 Takashi Tsuchiya
2．発表標題 An extension of asymptotic duality in SDP and its implication to the convergence theory of infeasible interior-point algorithms
3．学会等名 Second Workshop on Numerical Algebra, Algorithms and Analysis（招待講演）
4．発表年 2021年

1．発表者名 Takashi Tsuchiya, Louenco Bruno and Masakazu Muramatsu
2．発表標題 Duality theory of SDP revisited: most primal-dual weakly feasible SDPs have finite nonzero duality gaps
3．学会等名 The Sixth International Conference on Continuous Optimization（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Takashi Tsuchiya
2．発表標題 A limiting analysis of regularization of SDP and its implication to infeasible interior-point algorithms
3．学会等名 Discrete Optimization and Machine Learning（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 Takashi Tsuchiya
2．発表標題 A Limiting Analysis on Regularization of SDP and its Implication to Infeasible Interior-point Algorithms
3．学会等名 Workshop “Recent Development in Optimization III”（国際学会）
4．発表年 2019年

1．発表者名 土谷隆
2．発表標題 線形計画問題と半正定値計画問題への幾何学的接近法
3．学会等名 京都大学数理解析研究所組合せ最適化セミナー（招待講演）
4．発表年 2021年

1．発表者名 土谷隆
2．発表標題 悪条件半正定値計画問題の数理とアルゴリズム
3．学会等名 第35回信号処理シンポジウム（招待講演）
4．発表年 2021年

1．発表者名 Takashi Tsuchiya, Bruno F. Lourenco, Masakazu Muramatsu, Takayuki Okuno
2．発表標題 A Limiting Analysis on Regularization of Ill-Conditioned SDP and Its Implication to Duality Theory
3．学会等名 SIAM Conference on Optimization（国際学会）
4．発表年 2021年

1．発表者名
Takashi Tsuchiya, Bruno F. Lourenco, Masakazu Muramatsu, Takayuki Okuno

2．発表標題
A Limiting Analysis on Regularization of Singular Semidefinite Programs and Its Implication to Infeasible Interior-point Algorithms

3．学会等名
IFORS2021（国際学会）

4．発表年
2021年

1．発表者名
Takashi Tsuchiya

2．発表標題
A New Look at Duality Theory of Singular SDPs and its Implication to Convergence of Infeasible Interior Point Algorithms

3．学会等名
Workshop on Continuous Optimization and Related Topics（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2021年

1．発表者名
Lourenco Bruno, Masakazu Muramatsu, Takashi Tsuchiya

2．発表標題
Completely solving general SDP

3．学会等名
Workshop on Continuous Optimization and Related Topics（招待講演）（国際学会）

4．発表年
2021年

1．発表者名
Lourenco F. Bruno

2．発表標題
Amenable Cones: Bridging Error Bounds and Facial Reduction

3．学会等名
Amenable cones: bridging error bounds and facial reThe 23rd International Symposium on Mathematical Programming (ISMP), Bordeaux, July, 2018.（国際学会）

4．発表年
2018年

〔図書〕　計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

－

6．研究組織

	氏名 （ローマ字氏名） （研究者番号）	所属研究機関・部局・職 （機関番号）	備考
研究分担者	北原　知就 (Tomonari Kitahara) (10551260)	九州大学・経済学研究院・准教授 (17102)	
研究分担者	上野　玄太 (Genta Ueno) (40370093)	統計数理研究所・モデリング研究系・教授 (62603)	
研究分担者	中田　真秀 (Maho Nakata) (50469912)	国立研究開発法人理化学研究所・情報システム本部・技師 (82401)	
研究分担者	ロウレンソ　ブルノ・フィゲラ (Lourenco Figuera Bruno) (80778720)	統計数理研究所・数理・推論研究系・准教授 (62603)	
研究分担者	小原　敦美 (Atsumi Ohara) (90221168)	福井大学・学術研究院工学系部門・教授 (13401)	

7．科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕　計1件

国際研究集会	開催年
Workshop “Recent Development in Optimization III”	2019年～2019年

8．本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関