

令和 5 年 5 月 31 日現在

機関番号：14301

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K01683

研究課題名(和文)ファイナンス工学における動学的最適化問題と派生証券分析の高度化

研究課題名(英文)Advances in stochastic optimization and derivatives pricing in financial engineering

研究代表者

江上 雅彦 (Egami, Masahiko)

京都大学・経済学研究科・教授

研究者番号：40467395

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,700,000円

研究成果の概要(和文)：まだ明らかになっていないマルコフ過程、特に拡散過程、が持つ性質を研究し、その結果を利用することで、従来取り扱うことが困難であった問題を明示的に解くこと、一般的なマルコフ過程に共通する手法を開発することで実務的なファイナンス問題への適用範囲を拡大すること、既存の方法に従来と異なる視点を加えモデル分析の精緻化を図り、新たな知見を得ることを目的とする課題である。具体的にはレジームスイッチする拡散過程を対象とした最適停止問題、時間反転を利用したクレジットリスク管理の精緻化、企業の倒産時における資産価値の分布の推計などの研究を遂行した。最初の2つのテーマについては国際的査読誌にアクセプトされた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

対象とする確率過程そのものの性質を明らかにして利用することにより、特殊なケースだけでなく一般的なレベルで、最適化問題や価格付け問題の解法を可能にした。場合によっては明示解を求めることができるため学術的意義がある。同時に、解法可能な問題の範囲を拡大することができ、明示解は比較静学を容易にするため実務上有益な問題に関して、より正確な経済学的な知見を得ることに繋がる点で社会的意義がある。

研究成果の概要(英文)：The main objectives include to study Markov processes, especially diffusions, in more a refined manner in view of explicitly solving problems which would not be handled otherwise, and to expand the range of solvable problems in finance by developing techniques commonly employable to general Markov processes, and to obtain new insights into results of model-based analyses by adding new prospective and through sophistication. The results include the following: we have solved optimal stopping problems under regime-switch models, advanced credit risk management by using time reversal techniques, and estimated the loss-given-default distribution. The first two projects successfully resulted in the publication at prestigious international journals.

研究分野：ファイナンス工学

キーワード：マルコフ過程 拡散過程 最適停止問題 最終通過時刻 時間反転 レジームスイッチ CATボンド

様式 C - 19、F - 19 - 1、Z - 19 (共通)

1. 研究開始当初の背景

派生証券の価格決定やリスクヘッジ、信用リスク管理、コーポレートファイナンス、金融問題における不確実性下での意思決定等には、マルコフ過程、特にブラウン運動に代表される拡散過程やレヴィ過程に代表されるジャンプを伴う確率過程が利用される。これらのマルコフ過程は株価・利子率等の原資産価格、キャッシュリザーブ、総資産額などの経済変数を動的に表現できるため、不確実性下での経済現象のモデル化には必要不可欠である。

いろいろな要素を加えてモデルを複雑にすれば、より現実性の高い問題を分析することができる一方、解法は困難になる。一般的な設定のもとではモンテカルロシミュレーション等の手法でしか解決できない場合は多い。無論、問題を明示的に解法しなくても、数値計算により価格を求めることは不可能ではないが、計算負荷の増加による精度の劣化、計算結果から経済的含意を得ることが困難という課題が残る。そのためマルコフ過程、特に汎用性が高い拡散過程の確率的な性質を研究することで、解法可能な問題の領域を拡大することを研究課題とした。

2. 研究の目的

(1) レジームスイッチモデルの研究

原資産価格の変動を規定するパラメータが景気循環等によって変化するレジームスイッチモデルは、非常に多くの文献で利用されている。本研究ではレジームスイッチモデルにおける最適停止問題を、一般的な拡散過程と一般的な(停止時点で受取る)報酬関数に対して適用可能な方法を発見し解法することを目的とする。

(2) マルコフ過程の基準点の最終通過と時刻消失時刻における分布の研究

過渡的(transient)なマルコフ過程は有限時間内に消失するが、その前にある基準点(とす)を最終的に通過する時刻が存在する。この時刻をクレジットリスク管理に応用する研究を企図した。まず当該最終通過時刻から消失するまでの時間は2つの確率変数の差であるため、シミュレーションによる数値計算では大きな標準誤差が発生してしまう。この時間をどう数学的に特徴づけて、分布を計算するかを目的の一つとした。

企業のデフォルトモデルにおける誘導型アプローチでは、予期できないポワソン過程によるジャンプの発生が当該企業のデフォルトを示すが、その時点での企業の資産価値が分からないため、回収不能になる貸出債権額の分布を予測することは難しくなる。そこで、企業の資産価値を表現するマルコフ過程とポワソンジャンプを引き起こす強度(intensity)という2つの確率過程を結びつける適切なモデルを構築し、基準点の最終通過時刻後にポワソンジャンプが起こりデフォルト発生と考える。この設定からデフォルト時点の資産価格の分布、および当該企業への貸出債権の回収不能額の分布を計算する。

(3) 加法的汎関数を利用したマルコフ過程の重ね合わせの研究

単調増加するレヴィ過程 $A(t)$ を新しい「時計」として使い、連続的に変化する確率過程 $Z(t)$ の時間をその新しい「時計」で計測することにより $V(t) = Z(A(t))$ という新しいマルコフ過程を考えることができる。この枠組みを災害リスクのヘッジとして近年盛んに研究が進められている災害債券(CATボンド)の研究に応用する。この場合、 $V(t)$ はCATボンドの市場価値、 $A(t)$ は t 時点までの災害の被害総額となる。

(4) マルコフ過程の研究

上記(1)~(3)の課題においては複雑な動学モデルを取り扱うことを考慮し、確率過程の理

論研究を並行して行う。

3. 研究の方法

前項(1)の研究においては、好況時・不況時を2つのレジームとする場合、好況レジームでのみ実行できる停止時刻と不況レジームでのみ実行できる停止時刻を考え、元の問題を(相互に関連する)2つの確率過程に関する最適停止問題のペアに帰着させ、それぞれの問題に一次元の最適停止問題の理論を利用する方法を採った。

前項(2)の研究においては、適切な時刻から拡散過程を時間反転するTime Reversalとそれに関連する条件付き拡散過程であるh-transformの概念を用いた。加えて企業のデフォルトモデルにおいて資産価値を表現するマルコフ過程とデフォルトを表現する強度を関連させる方法として、基準点の最終通過時刻以降、当該マルコフ過程がある閾値を下回っている時間の関数として強度を表現した。そしてデフォルト発生時(ポワソンジャンプが起こる時刻)における企業の資産価値を表現するマルコフ過程の分布を計算することとした。

前項(3)の研究においてはCATボンドの価格変動に対して特定の動学モデルを仮定することなく、純粋に理論的な価格式を用いることとした。これはCATボンドの原資産となる災害による被害総額の関数として価格が決定されるという事実を利用している。被害総額はマルコフ過程の加法的汎関数と仮定することができるため、価格の時系列データから背後にある被害総額の推移を推計する方法を研究した。このアプローチのメリットは、一旦原資産(被害総額)の動きを推計することができれば、より複雑にストラクチャーされたものであっても、原資産の動きに基づいてCATボンドの価格を求めることが容易になる点である。

4. 研究成果

(1) レジームスイッチモデルする状況での最適停止問題の研究では、ほぼ満足のいく一般性のレベルにおいて、問題の解法手段を発見することができた。この研究は"A direct solution method for pricing options in regime-switching models"と題する論文にまとめ、国際的査読付ジャーナルであるMathematical Financeにアクセプトされ、2019年にオンラインで、2020年に冊子体で公刊された。解きうる問題の範囲を拡大することができた点、幾何学的方法に帰着できたため、最適性の証明において(先行研究のように)複雑な解析的証明を行う必要がない点は、経済学的・数学的貢献があると考えている。5「主な研究論文等」参照。

(2) マルコフ過程の最終通過時刻とその応用の研究については、時間反転を利用し任意の点の最終通過時刻と消失時刻の間隔という確率変数を一般の拡散過程のレベルでcharacterizeすることができた。これはクレジットリスクの観点では、企業経営の根本的な悪化からデフォルトにいたるまでの時間に相当するため、マネジメントや銀行のリスク管理の面で有益な情報であると考えている。成果をまとめた論文"Time reversal and last passage time of diffusions with applications to credit risk management"が国際的査読付ジャーナルであるFinance and Stochasticsにアクセプトされ、2020年に刊行された。5「主な研究論文等」参照。

加えて、3「研究の方法」で記載した要領で、最終通過時刻を利用してデフォルト時点の債権回収不能額を推計する研究も進めた。モデル分析に基づいて実証研究も行った。CDSマーケットでクオートされているスプレッドには、当該企業への貸出債権の棄損率が見込まれているはずであるので、われわれが求めた理論的な棄損率の分布と整合的であるかを検証した。本課題は当初想定したより大きなプロジェクトとなり、理論部分と実証部分をそれぞれより深く追求する計画である。まずモデル構築の方法等の理論面とpreliminaryな実証結果を、M. Egami and

R. Kevkhishvili, "A new approach to estimating loss given default"という論文にまとめた(<https://arxiv.org/abs/2009.00868>)。

(3) 加法的汎関数を利用したCATボンドの研究については、債券の価格変動の背後にある累積被害総額を表す確率過程の推計に注力した。その方法は価格決定式の理論的な分析に基づいており、累積被害総額の分布に強い仮定を置く必要がないため汎用性が高いと考えられる。リスク管理の文献で通常使用される複合ポワソン過程を用いて、実際の市場価格データから、必ずしも投資家にとってアベイラブルではない累積被害総額の推計を行った。CATボンドの市場価格は比較的大規模な災害が発生した直後には大きく下落し、理論的価値をアンダーシュートすることが多く、その後被害額の規模が正確に判明する過程で理論的価値まで回復する。今回はこの現象を処理する手法についても提案を行った。さらに累積被害総額の推計結果を用いて、CATボンドが複雑なペイオフ構造を持つ場合の評価を行った。複雑なペイオフ構造を持つCATボンドを直接モデル化する方法に比べ、誤差が小さいものと期待できる。この研究の成果を取りまとめた論文を現在執筆中である。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計2件（うち査読付論文 2件 / うち国際共著 0件 / うちオープンアクセス 0件）

1. 著者名 M. Egami and R. Kevkhishvili	4. 巻 24
2. 論文標題 Time reversal and last passage time of diffusions with applications to credit risk management	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Finance and Stochastics	6. 最初と最後の頁 795 ~ 825
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s00780-020-00423-6	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

1. 著者名 M. Egami and R. Kevkhishvili	4. 巻 30 (2)
2. 論文標題 A Direct Solution Method for Pricing Options in Regime-switching Models	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Mathematical Finance	6. 最初と最後の頁 547 ~ 576
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1111/mafi.12220	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件（うち招待講演 1件 / うち国際学会 2件）

1. 発表者名 江上雅彦
2. 発表標題 An application of time reversal to credit risk mamangement
3. 学会等名 一橋大学経済統計ワークショップ (招待講演)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masahiko Egami
2. 発表標題 An application of time reversal to credit risk mamangement
3. 学会等名 Bachelier Finance Society, 10th World Congress (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Masahiko Egami
2. 発表標題 A new approach to estimating loss-given-default distribution
3. 学会等名 Bachelier Finance Society, 11th World Congress (国際学会)
4. 発表年 2022年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

http://www.econ.kyoto-u.ac.jp/~egami/

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	ケヴヘイッシュウィリ ルースダン (Kevkhishvili Rusudan)	京都大学・経済学研究科・専任講師 (14301)	

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関
---------	---------