

科学研究費助成事業 研究成果報告書

令和 3 年 5 月 5 日現在

機関番号：32677

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2020

課題番号：18K01707

研究課題名(和文) 無リスク金利とデフォルトの確率モデルによるソブリンCDSの評価とプレミアム予測

研究課題名(英文) Pricing and forecasting of sovereign CDS premium with stochastic risk-free rate and default intensity

研究代表者

神楽岡 優昌 (Kagraoka, Yusho)

武蔵大学・経済学部・教授

研究者番号：40328927

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 3,300,000円

研究成果の概要(和文)：ソブリンCDSと国債は別々に価格評価され、ソブリンCDSのプレミアムは他国通貨建てのクォートが、自国通貨建てのそれよりも高いことを理論的に説明できていなかった。本研究では、リスクフリー・レートとデフォルト強度をそれぞれ確率過程でモデル化し、さらに確率過程間に相関を導入することにより、それらの問題の解決をおこなった。CDSの理論プレミアムは、偏微分方程式にFractional Step Methodsを適用して求めた。実証分析結果は、CDSと国債を統一的に評価でき、相関により異なる通貨建てのCDSプレミアム差を部分的に説明できるものの、それだけではプレミアム差を説明できないことを明らかにした。

研究成果の学術的意義や社会的意義

米国、ドイツなどの国債は重要な投資対象であり、ソブリン危機が発生するまでは無リスク資産と見なされてきた。しかしながら、ソブリン債務危機は国債のクレジット・リスクを顕在化した。その結果、投資家は、国債のクレジット・リスクをヘッジするために、ソブリンCDSを購入している。国債とソブリンCDSは共にリスクフリー・レートとデフォルト強度を原資産とするデリバティブと解釈できるが、別々に価格評価がされてきた。本研究により、国債とソブリンCDSを統一的にリスク評価と管理を可能にし、さらに、クォートする通貨によって異なるソブリンCDSプレミアム差を説明できる。

研究成果の概要(英文)：A unified model that consistently evaluates sovereign credit default swap (CDS) quanto and government bonds is developed. By product, a new procedure is proposed to calibrate stochastic processes for the risk-free interest rate and the sovereign default intensity to sovereign CDS quanto spreads and government bond yields. Fractional step methods are applied to solve a partial differential equation (PDE) for derivative prices, which cannot be solved using a standard finite difference method due to a cross derivative term. An empirical study is conducted on United States, German and Portuguese CDS quanto spreads in the midst of the European sovereign debt crisis and reveals that sovereign CDS quanto spread differentials are partially explained by introducing a correlation between the risk-free interest rates and the sovereign default intensity.

研究分野：金融工学，数理ファイナンス

キーワード：ソブリンCDS quanto CDS Fractional Step Methods 国債 リスクフリー・レート デフォルト強度

1. 研究開始当初の背景

伝統的なファイナンス研究では国債金利をリスクフリー・レートと同一視してきたが、ソブリン CDS プレミアムがゼロでないことは、国債金利がデフォルト・スプレッドを上載せしていることを示唆する。したがって、国債金利をリスクフリー・レートとみなすことは誤った仮定である。一方、ソブリン CDS に関する研究では、ソブリン CDS プレミアムをその国のデフォルト確率と同一視してきた。確かにソブリン CDS のキャッシュフローはその参照体となるソブリンのデフォルト確率に左右されるものの、CDS プレミアムは、デフォルト時の補償額と定期的なプロテクション料のキャッシュフローの期待値をリスクフリー・レートで割り引き、前者を後者で除して計算される。この評価式から明らかなように、CDS プレミアムはリスクフリー・レートとデフォルト確率の複雑な非線形関数であり、CDS プレミアムをデフォルト確率と同一視することに理論的な裏付けがない。このようにソブリン CDS の既存研究は、分析手続きを簡素化できるため（厳密にデフォルト確率を推定するには、リスクフリー・レートとデフォルト強度の非線形関数を解かなければならない）、「国債金利 = リスクフリー・レート」、「CDS プレミアム = デフォルト確率」として、理論モデル構築や実証分析がおこなわれてきた。この誤った認識に基づいた分析結果はバイアスを受けている可能性を否認しない。本研究の狙いは、「国債金利 = リスクフリー・レート」、「CDS プレミアム = デフォルト確率」の正しい認識に基づき、国債金利とソブリン CDS プレミアムの期間構造からリスクフリー・レートとソブリンのデフォルト強度(デフォルト強度の時間積分値の指数関数がデフォルト確率に対応)の期間構造を推定し、ソブリン CDS の価格評価モデルと予測モデルを開発することである。CDS の価格評価モデルでは、リスクフリー・レートとデフォルト強度を共に確率的(stochastic)に拡張してその確率過程のモデル化をおこなうだけでなく、リスクフリー・レートとデフォルト強度の相関構造を解明することを狙いとする。さらにソブリン CDS 評価に必要な多次元偏微分方程式の数値解法を開発する。CDS の価格予測モデルでは、リスクフリー・レートとデフォルト強度を観測不可能な状態変数、国債金利と CDS プレミアムを観測量として、状態空間モデルによる定式化をおこない、将来のリスクフリー・レートとデフォルト強度の予測をおこなうことを狙いとする。

2. 研究の目的

第1の目的は、国債価格との間の整合性を保持したうえで、ソブリン CDS の価格評価モデルの開発である。リスクフリー・レートとデフォルト強度を共に確率的(stochastic)として、マーケットで観測される時間変化と整合する確率微分方程式を定式化する。

第2の目的は国債金利とソブリン CDS プレミアムが満たすべき、リスクフリー・レートとデフォルト強度を状態変数とする多次元偏微分方程式を構築し、その多次元偏微分方程式の数値解法を開発することである。この確率偏微分方程式は、リスクフリー・レートとデフォルト強度の交差微分項をもつが、その場合でも有効な解法を開発する。

第3の目的はソブリン CDS 価格予測モデルの開発である。国債金利とソブリン CDS プレミアムを観測可能、リスクフリー・レートとデフォルト強度を観測不能な状態変数と位置づける。リスクフリー・レートとデフォルト強度を状態空間モデルで定式化し、パラメータ推定をカルマン・フィルターにより実行する。

3. 研究の方法

【第1フェーズ】国債金利とソブリン CDS プレミアムの価格予測モデルの構築をおこなう。国債金利とソブリン CDS プレミアムを観測量、リスクフリー・レートとデフォルト強度を観測不可能な状態変数として状態空間モデルを定式化し、パラメータをカルマン・フィルターにより推定する。リスクフリー・レートとデフォルト強度それぞれの期間構造を対象とするために、期間構造を Nelson & Siegel (1987) の3ファクター・モデルで説明する。この手法は金利予測モデルとして Diebold & Li (2006) と Diebold, Rudebusch & Aruoba (2006) によって開発されたが、ソブリン CDS を対象にした論文は発表されていない。また、予備分析の結果は、デフォルト強度の期間構造の形状は2~7年の満期で最高値をとるようにコブをもっており、そのコブの位置が CDS プレミアムの大きさの変化とともに移動することを示した。また、CDS プレミアムの水準は、時間とともに大きく変化していることも観測された。そこで Koopman, Mallee & van der Wel (2010) にならって、コブの位置を決定する減衰パラメータを時変とし、観測される事実を説明できるように状態空間モデルを拡張する。リスクフリー・レートおよび

デフォルト強度を同時に Nelson-Siegel モデルによる状態空間モデルで定式化すること、さらに時変減衰パラメータを導入することは、いずれもこれまで論文に発表されておらず、本研究の独自性・創造性の証左となる。

【第2フェーズ】ソブリン CDS プレミアムの価格評価モデルの開発をおこなう。最初に、ソブリン CDS のプレミアムと整合し、マイナス金利を再現するリスクフリー・レートの確率過程のモデル化をおこなう。リスクフリー・レートの確率過程は、負値もとる Vasicek 型を採用する。次に、ソブリン CDS が示唆するソブリンのデフォルト強度の確率過程のモデル化をおこなう。デフォルト強度の確率過程は、非負値をとる平方根拡散過程を採用する。米国やドイツのデフォルト強度は、平時のマーケットにおいて非常に低い水準をとる一方、2011 年のソブリン危機の際には急騰した。デフォルト強度の確率過程は、そのようなマーケットを再現できるように、注意を払ってモデル化をおこなう。リスクフリー・レートとデフォルト強度の確率微分方程式のパラメータ推定は最尤法でおこなう。

【第3フェーズ】多次元微分方程式の有限差分法による解法の開発とそれを用いたリスクフリー・レートとデフォルト強度の相関構造の分析をおこなう。この偏微分方程式はリスクフリー・レートとデフォルト強度の交差微分項をもつことが特徴であり、その場合でも適用可能な有限差分法の fractional step 法の適用を検討している。fractional step 法は ADI 法の影に隠れてこれまでファイナンス分野では適用されておらず、本研究がファイナンス分野での適用可能性を検討する最初の試みとなる。

4. 研究成果

(1) デフォルト強度とリスクフリー・レートおよびそれらの相関の推定手法の開発
デフォルト強度とリスクフリー・レートの相関を推定する数理モデルを構築した。デフォルト強度は正値性を尊重して Cox- Ingersoll- Ross のモデルを、リスクフリー・レートはマイナス金利の存在を考慮して Vasicek モデルを適用した。実証研究は、米国とドイツを対象に行った。その結果、国家のデフォルト強度とリスクフリー・レートを分離して推定することに成功し、それらが負の相関を持つことが明らかにされた。研究成果の論文 "Are the Risk-Free Interest Rates Correlated with Sovereign Default Intensities?" は The Journal of Fixed Income (Spring 2019) 28(4) pp.91-103 に掲載された。

(2) 国債金利とソブリン CDS プレミアムの価格予測モデル
国債金利とソブリン CDS プレミアムの価格予測モデルを構築した。デフォルト強度のタームストラクチャーはその水準や傾きが変わるだけでなく、中期の満期にコブをもつこともある。そこで Nelson-Siegel の関数形を適用して状態空間モデルを適用しパラメータを推定した。デフォルト強度カーブの形状を支配する減衰パラメータを時変に拡張したところに独自性がある。ドイツを参照するソブリン CDS の実証分析から、デフォルト強度カーブの減衰パラメータは時間とともに大きく変わり、デフォルト強度のレベルの上昇と共に減衰パラメータも増大することが明らかにされた。研究結果 "The Changing Shape of Sovereign Default Intensities" は国際コンファレンス ITISE 2018(5th International conference on Time Series and Forecasting) で発表した。その後、査読を経て精選論文集 Theory and Applications of Time Series Analysis: Selected Contributions from ITISE 2018, Springer (2019), pp.203-216 に掲載された。

(3) 偏微分方程式の数値計算技法
CDS プレミアムが満たす偏微分方程式は、時間に関して 1 次元、空間に関して 2 次元以上の多次元になる。具体的には空間次元はリスクフリー・レートとデフォルト強度に対応する。一般に多次元偏微分方程式は解析解をもたず、有限差分法に代表される数値解法が有効である。空間に関する交差微分項がない場合は有限差分法のなかでも Alternating Direction Implicit (ADI) 法が有効と言われているが、交差微分項が存在する場合、ADI 法が適用できないとの指摘がある。そこで交差微分項が存在する場合にも適用可能な数値計算技法として、有限差分法の 1 つである Fractional Step 法と 2000 年代に入ってからポピュラーになった動径基底関数を取り上げ、適用可能性を分析した。具体的には、これらの手法の計算精度を評価するために、交換オプションのプレミアムを計算した。交換オプション・プレミアムが満たすべき偏微分方程式は交差微分項を持つものの、プレミアムの解析評価式が求められている稀なケースであり、ベンチマークとして適当である。様々なパラメータについて、交換オプションのプレミアムを求めたところ、Fractional Step 法と動径基底関数の両方が、小さい計算誤差でプレミアムを算出することがわかった。計算時間については、離散化の分割数が小さい場合は Fractional Step 法と動径基底関数の両方で同程度の短い計算時間であったが、分割数が大きくなると動径基底関数の方が Fractional Step 法よりも計算時間を要することが判明した。研究成果 "The

Fractional Step Method versus the Radial Basis Functions for Option Pricing with Correlated Stochastic Processes” は査読を経て、International Journal of Financial Studies (2020) 8(4), 77 に掲載された。

(4) リスクフリー・レートとデフォルト強度の相関を考慮した統一モデル

ソブリン CDS の通貨によって異なるプレミアムを説明するモデル化を試みた。一般にソブリン CDS のプレミアムは他国通貨建てのクォートが、自国通貨建てのそれよりも高い。既存研究は対象ソブリンのデフォルトに伴う、自国通貨の価値低減で説明しようと試みているが、コンセンサスを得るまで至っていない。本研究では、リスクフリー・レートとデフォルト強度の相関によって、プレミアム差を説明できるか分析した。具体的には、リスクフリー・レートが Vasicek 型、デフォルト強度が指数 Vasicek 型の確率過程にそれぞれ従い、さらに確率過程間に相関があるとモデル化した。そして、ソブリン CDS と国債の 2 つの確率過程と相関のパラメータを、ソブリン危機後顕在化した、ソブリンのデフォルト・リスクが高い水準で継続した 2012 年 5 月のマーケット・データにキャリブレーションして求めた。CDS の理論プレミアムは、リスクフリー・レートとデフォルト強度の間の相関を導入し、Fractional Step Method を適用して求めた。実証分析結果は、リスクフリー・レートとデフォルト強度の間の相関が、異なる通貨建てでクォートされた CDS プレミアム差を部分的に説明できるものの、それだけではプレミアム差を説明できないことが明らかにされた。研究成果 “A unified model of sovereign CDS quanto spreads and government bond yields” は大学のディスカッション・ペーパーに取り纏め、今後、ジャーナルに投稿を検討している。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計4件（うち査読付論文 3件/うち国際共著 1件/うちオープンアクセス 1件）

| | |
|--|-----------------------|
| 1. 著者名 Yusho KAGRAOKA | 4. 巻 28-4 |
| 2. 論文標題 Are the Risk-Free Interest Rates Correlated with Sovereign Default Intensities? | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 The Journal of Fixed Income | 6. 最初と最後の頁 91-103 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3905/jfi.2019.1.068 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |
| 1. 著者名 Yusho Kagraoka, Zakaria Moussa | 4. 巻 2018 |
| 2. 論文標題 The Changing Shape of Sovereign Default Intensities | 5. 発行年 2019年 |
| 3. 雑誌名 Theory and Applications of Time Series Analysis: Selected Contributions from ITISE 2018, Springer | 6. 最初と最後の頁 203-216 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/978-3-030-26036-1_14 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 該当する |
| 1. 著者名 Kagraoka Yusho | 4. 巻 8 |
| 2. 論文標題 The Fractional Step Method versus the Radial Basis Functions for Option Pricing with Correlated Stochastic Processes | 5. 発行年 2020年 |
| 3. 雑誌名 International Journal of Financial Studies | 6. 最初と最後の頁 77~77 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3390/ijfs8040077 | 査読の有無 有 |
| オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である） | 国際共著 - |
| 1. 著者名 Kagraoka Yusho | 4. 巻 99 |
| 2. 論文標題 A unified model of sovereign CDS quanto spreads and government bond yields | 5. 発行年 2021年 |
| 3. 雑誌名 Musashi University Discussion Paper series | 6. 最初と最後の頁 1-19 |
| 掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし | 査読の有無 無 |
| オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難 | 国際共著 - |

〔学会発表〕 計1件（うち招待講演 0件 / うち国際学会 1件）

| |
|--|
| 1. 発表者名 Yusho Kagraoka, Zakaria Moussa |
| 2. 発表標題 On the changing shape of the sovereign default intensities |
| 3. 学会等名 International Conference on Time Series and Forecasting (ITISE 2018) (国際学会) |
| 4. 発表年 2018年 |

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

| 6. 研究組織 | 氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号) | 所属研究機関・部局・職 (機関番号) | 備考 |
|---------|---------------------------|-----------------------|----|
|---------|---------------------------|-----------------------|----|

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計0件

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

| 共同研究相手国 | 相手方研究機関 |
|---------|---------|
|---------|---------|