

令和 5 年 6 月 13 日現在

機関番号：10102

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03200

研究課題名(和文) 低次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の研究

研究課題名(英文) Study on the formal groups of low-dimensional Calabi-Yau varieties

研究代表者

後藤 泰宏 (GOTO, Yasuhiro)

北海道教育大学・教育学部・教授

研究者番号：40312425

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,900,000円

研究成果の概要(和文)：K3曲面や楕円曲線によるファイブレーションを持つ3次元カラビ・ヤウ多様体について、各ファイバーの形式群と本体の多様体の形式群との間の関係性を調べ、より特徴的な構造を持つ多様体において上記関係性を定式化した。また、3次元デルサルト型多様体やBorcea-Voisin型カラビ・ヤウ多様体について形式群の高さを数値的に計算しその値の範囲を特定するとともに、4次元Delsarte型多様体についても形式群の高さを計算した。加えて、ほぼ毎年、カラビ・ヤウ多様体に関わる国際ワークショップを開催した。

研究成果の学術的意義や社会的意義

本研究は、各種ファイブレーションを持つ3次元カラビ・ヤウ多様体について、本体とファイバー間の形式群の関係性を調べた点で意義がある。これは、楕円曲線の形式群の変形を通して楕円型K3曲面の形式群を調べたArtinの研究の3次元化に向けた試みである。また、形式群の高さの計算を進め、3次元カラビ・ヤウ多様体の場合にその値分布を示すデータを更新し、4次元カラビ・ヤウ多様体においては高さの数値的データを得たことが新しい。

研究成果の概要(英文)：The formal groups of Calabi-Yau threefolds with K3 or elliptic fibrations are considered. The relationship between the formal group of a threefold and those of its fibers were investigated, and in various special cases, the relationship of the formal groups was formulated explicitly. For threefolds of Delsarte type or of Borcea-Voisin type, the height of the formal groups was computed and the range of distribution of the values was determined. Similar calculations were done also on Calabi-Yau fourfolds of Delsarte type. In addition, an international workshop on Calabi-Yau varieties was organized every year.

研究分野：数物系科学

キーワード：数論的代数幾何 形式群 カラビ・ヤウ多様体 デルサルト型多様体 ファイブレーション 国際研究者交流

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

1. 研究開始当初の背景

(1) 本研究の目的は、K3 曲面や楕円曲線によるファイブレーションを持った 3 次元カラビ・ヤウ多様体の形式群を考察することである。3 次元カラビ・ヤウ多様体の研究は、弦理論におけるミラー対称性の研究を契機として 1990 年代以降急速に発展してきた。ミラー対称性の研究は主に複素数体上で行われるが、多様体が数体上や有限体上で定義されるときは、数論的考察も可能となる。例えば、Candelas、de la Ossa、Villegas らによるゼータ関数とミラー対称性の関係性の研究や、表現論を用いて多様体のモジュラリティとミラー対称性の関連性を調べた研究等がある。本研究者も Livné、Yui と共同でカラビ・ヤウ多様体のモジュラリティを考察していた。

(2) 一方、形式群については、まず 1970 年代に 2 次元カラビ・ヤウ多様体である K3 曲面の形式群に関する M. Artin と Mazur の重要な研究があり、1980 年代には楕円型 K3 曲面の Picard-Fuchs 方程式の解と形式群の関係性や、ゼータ関数と形式群の関係を探った Stienstra と Beukers らの先駆的研究があった。さらに、2000 年前後からは K3 曲面の形式群に係わる由井 (研究協力者) の研究、3 次元カラビ・ヤウ多様体の形式群に係る van der Geer と桂による一連の研究があり、多くの重要な知見がもたらされていた。その少し後には、曲線の形式群に関する西来路の研究、局所類対論の Lubin-Tate 形式群に関する Tempesta、Madunts らの研究、多様体の標数ゼロへの持ち上げに係わる呼子の研究等があった。本研究は、楕円型 K3 曲面の形式群を調べた Artin の研究の 3 次元版である。

2. 研究の目的

(1) 本研究では、K3 曲面や楕円曲線によるファイブレーションを持った 3 次元カラビ・ヤウ多様体を中心に、低次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の考察を目的とした。いくつかの特徴的な構造を持つ多様体に焦点を当て、計算機を用いた数値計算を行いつつ、次の 2 つの事柄の解明を具体的な目標とした。

各ファイバーの形式群と本体の 3 次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の間にある関係性
3 次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の高さがとりえる値の範囲

(2) 特徴的な構造を持つ多様体としては、次の 2 種類の 3 次元カラビ・ヤウ多様体を用いた。
Borcea-Voisin 型 3 次元カラビ・ヤウ多様体：これは、K3 曲面 S と楕円曲線 E の積を involution と呼ばれる群作用 \times で割り、商多様体 $S \times E / \times$ を特異点解消することにより得られる多様体のことであり、K3 曲面や楕円曲線によるファイブレーションを持つ。

3 次元 (重さ付き) デルサルト型多様体とその変形：デルサルト型多様体は、フェルマー型多様体 ($x_0^{m_0} + x_1^{m_1} + \dots + x_n^{m_n} = 0$) の一般化であり、 $x_0^{a_{00}} \dots x_n^{a_{0n}} + \dots + x_0^{a_{n0}} \dots x_n^{a_{nn}} = 0$ のような n 個の単項式で定義される。本研究では $n=4$ の場合が中心となる。3 次元デルサルト型多様体は K3 曲面や楕円曲線によるファイブレーションを持つものが多い。この式に単項式をいくつか付け足すことにより多様体の変形が定義される。

(3) 研究の具体的な目標としては次の 4 つを置いた。

楕円型ファイブレーションを持つ 3 次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の考察

楕円型ファイブレーションを持った K3 曲面に関する Artin の研究では、楕円曲線の形式群の係数を 1 変数多項式に置き換えて考察している。本研究においては、本体の多様体の次元が 1 つ上がるため、楕円曲線の形式群の係数として 2 変数多項式を選ぶことにより形式群の記述を試みた。

K3 曲面によるファイブレーションを持つ 3 次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の考察

一般に、2 次元以上のカラビ・ヤウ多様体の形式群を具体的に記述することは難しい。そのため、研究にはコホモロジー群やゼータ関数、あるいは Dieudonné 加群と呼ばれるものが用いられる。本研究では、K3 曲面のゼータ関数を通して形式群をできる限り具体的に記述し、その係数を 1 変数多項式に置き換えることによって、3 次元カラビ・ヤウ多様体の形式群を考察した。

各ファイバーの形式群と本体の形式群との関係性の考察

まず、上記の結果を精密化し、楕円曲線の形式群と 3 次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の関係性を調べる。において K3 曲面の形式群を具体的に記述することが難しいようであれば、ゼータ関数やコホモロジー群を通して形式群の比較を行うこととした。

3 次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の高さの計算

上記 ~ で得た結果をもとに、本研究で考察する 3 次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の高さがどのような値をとるか考察した。

3. 研究の方法

(1) 当初の研究計画は3年間であり、次のような計画で研究を進めた。なお、コロナ感染症の影響で研究打合せや研究会が延期となり、実際の研究は5年間かけて実施した。

・1年目は、上記目標とを行う。計算ソフトMagmaを用いた数値計算を行いつつ、Artinの結果を楕円型ファイブレーションを持った3次元カラビ・ヤウ多様体に拡張する。また、平成30年の夏に函館で「Workshop on Calabi-Yau Varieties: Arithmetic, Geometry and Physics」を開催し、研究発表を行うとともに多くの研究者と情報交換を行うことを計画した。

・2年目は、上記目標とを行う。計算ソフトMagmaを用いた数値計算を援用しながら、各種コホモロジー群やゼータ関数を計算することによって、K3曲面によるファイブレーションを持った3次元カラビ・ヤウ多様体の形式群を分析する。また、この年には「第4回函館数論幾何ワークショップ」を開催し、研究発表を行うとともに多くの研究者と情報交換を行う計画とした。

・3年目は、上記目標とを行う。目標で得た関係性を最大限に利用しつつ、3次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の高さを評価する。この年も国内の研究集会の開催状況を見ながら、函館でも研究会の開催を計画した。

(2) 研究全般にわたり、Queen's大学(カナダ)の由井典子教授に研究協力を依頼する。普段はメール等で助言や研究協力を求め、毎年2回の研究打ち合わせ(東京とカナダ)を予定した。成果発表は、毎年、国内と国外でそれぞれ1~2回を計画した。

4. 研究成果

本研究の目的は、K3曲面や楕円曲線によるファイブレーションを持った3次元カラビ・ヤウ多様体の形式群を考察することである。Borcea-Voisin型3次元カラビ・ヤウ多様体やデルサルト型多様体といった特徴的な構造を持つ多様体に焦点を当て、各ファイバーの形式群と本体の3次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の間にある関係性や3次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の高さがとりえる値の範囲について研究した。

(1) 学術的成果

上記の4つの具体的目標ごとに研究成果を述べる。

楕円型ファイブレーションを持つ3次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の考察

楕円型ファイブレーションを持つK3曲面の形式群に関する既存の理論(ArtinやBeukers Stienstraの結果)を再吟味し、楕円曲線の形式群の係数を1変数多項式から2変数多項式へ拡張することを試みた。多項式の変数に無関係なところについては、部分的にArtinらの結果を3次元カラビ・ヤウ多様体に拡張できたが、全体的には具体性のある結果には至らなかった。

K3曲面によるファイブレーションを持つ3次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の考察

K3ファイブレーションを持つBorcea-Voisin型3次元カラビ・ヤウ多様体について、K3曲面と3次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の高さを比較し、両者の関係性を表す不等式を得た。具体的には、K3曲面Sと楕円曲線Eの積から作られるBorcea-Voisin型3次元カラビ・ヤウ多様体については、その形式群の高さはSまたはEの形式群の高さの2倍を超えないというものである。

各ファイバーの形式群と本体の形式群との関係性の考察

K3ファイブレーションを持つDelsarte型多様体について、各ファイバーの形式群と本体である3次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の高さを比較した。さらに、Borcea-Voisin型3次元カラビ・ヤウ多様体に対して得られていた形式群の関係式をコホモロジー論の観点から再検証し、デルサルト型多様体への拡張を図った。その結果、ファイブレーションを持つ3次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の高さは比較的小さいことが分かった。逆に言うと、大きな高さをもつカラビ・ヤウ多様体を得るためには、各種ファイブレーションを持たないものを探ることが効果的であると言える。加えて、カラビ・ヤウ多様体におけるファイブレーションの有無の判定に、形式群の高さを利用できることが分かった。

3次元カラビ・ヤウ多様体の形式群の高さの計算

デルサルト型多様体やBorcea-Voisin型3次元カラビ・ヤウ多様体に対して、計算ソフトMagmaを利用して形式群の高さを具体的に計算した。その計算方法はファイブレーションに無関係であるので一般のデルサルト型多様体に対して適用できる。計算しやすい数種類の多様体の族を用いることにより、1から82までの数多くの値を形式群の高さとして実現することができた。また、同様の方法を4次元デルサルト型多様体に拡張できることを確認し、フェルマー型多様体を用いて数量的な計算を実行したところ、最大で306という形式群の高さを持つ4次元デルサルト型カラビ・ヤウ多様体を見つけることができた。

その他の成果

3次元カラビ・ヤウ多様体に対して Berglund-Hubsch-Krawitz (BHK) の構成したミラー対称性がある。それに該当する3次元カラビ・ヤウ多様体を考察し、各ミラーペアについて形式群の高さを比較した。また、Berglund-Hubsch-Krawitz (BHK) 型ミラー対称性を利用してデルサルトル型多様体をペアとして考察し、一部のミラーペアについて形式群の高さにおける共通性を確認した。

(2) 学術交流的成果

本研究では、研究者間の交流や情報交換を促進するため国際研究集会の開催に力を入れた。コロナ感染症の影響を受けた期間はオンラインで開催することにより、次のようにほぼ毎年ワークショップを開催することができた。

- ・平成30年12月に「函館数論幾何ワークショップ2018」を函館で開催し、研究発表を行うとともに多くの研究者と情報交換を図った。

- ・令和元年8月に「Workshop on Calabi-Yau Varieties and Related Topics 2019」を函館で開催し、研究発表を行うとともに研究者間交流を図った。なお、令和2年8月に予定していた台北での研究集会は延期となった。

- ・令和3年10月に「2021 Online Workshop on Calabi-Yau Varieties and related topics」をオンラインで開催した。

- ・令和4年8月に国際研究集会「Workshop on Calabi-Yau Manifolds and Mirror Symmetry」を学習院大学で開催した。

(3) 今後の展望

本研究の中で3次元カラビ・ヤウ多様体について得られた成果や計算手法を4次元カラビ・ヤウ多様体に拡張しその形式群の高さを計算した。今後は研究対象をさらに広げて計算を進めるとともに、3次元において考察したファイブレーションと形式群の関係を4次元カラビ・ヤウ多様体へ拡張することを考えたい。

本研究の後半で、カラビ・ヤウ多様体の形式群と密接に関わる Newton 多辺形に注目し、3次元デルサルトル型カラビ・ヤウ多様体において Newton 多辺形の辺々の傾きを計算した。今後はそれらの値と多様体の幾何的特徴等との関係性について研究したい。

5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計1件(うち査読付論文 1件/うち国際共著 0件/うちオープンアクセス 1件)

1. 著者名 Yasuhiro Goto	4. 巻 14
2. 論文標題 A Note on the Formal Groups of Weighted Delsarte Threefolds	5. 発行年 2018年
3. 雑誌名 Symmetry, Integrability and Geometry: Methods and Applications	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.3842/SIGMA.2018.097	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている(また、その予定である)	国際共著 -

〔学会発表〕 計3件(うち招待講演 3件/うち国際学会 3件)

1. 発表者名 Yasuhiro Goto
2. 発表標題 Calculations on the formal groups of Calabi-Yau fourfolds
3. 学会等名 Workshop on Calabi-Yau Varieties and Related Topics 2019 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yasuhiro Goto
2. 発表標題 Formal groups of low dimensional Calabi-Yau varieties
3. 学会等名 Calabi-Yau varieties and Mirror Symmetry Seminar (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

1. 発表者名 Yasuhiro Goto
2. 発表標題 Calculations on the formal groups of Calabi-Yau threefolds of Delsarte type
3. 学会等名 Hakodate Workshop on Arithmetic Geometry 2018 (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2018年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

北海道教育大学研究者総覧
<https://kensoran.hokkyodai.ac.jp/huehp/KgApp?kyoinId=ymieggggge&keyword=>

6. 研究組織

氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
---------------------------	-----------------------	----

7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計4件

国際研究集会 Workshop on Calabi-Yau Manifolds and Mirror Symmetry	開催年 2022年～2022年
国際研究集会 2021 Online Workshop on Calabi-Yau Varieties and Related Topics	開催年 2021年～2021年
国際研究集会 Workshop on Calabi-Yau Varieties and Related Topics 2019	開催年 2019年～2019年
国際研究集会 Hakodate Workshop on Arithmetic Geometry 2018	開催年 2018年～2018年

8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関		
カナダ	クイーンズ大学		