

令和 5 年 6 月 2 日現在

機関番号：11101

研究種目：基盤研究(C) (一般)

研究期間：2018～2022

課題番号：18K03201

研究課題名(和文) テータ関数の特殊値の研究-代数的構造の解明とその応用-

研究課題名(英文) Research on arithmetical properties of the special values of the theta-constants and the applications

研究代表者

立谷 洋平 (Tachiya, Yohei)

弘前大学・理工学研究科・准教授

研究者番号：90439539

交付決定額(研究期間全体)：(直接経費) 2,500,000円

研究成果の概要(和文)：本研究課題の主な目的は、整数論の分野において重要な研究対象である保型形式の特殊値の数論的性質の解明である。本研究ではアイゼンシュタイン級数値の代数的独立性に関するNesterenkoの結果を応用し、より一般の保型関数の特殊値に対して代数的独立性を導く判定条件を確立した。特にその応用として、フィボナッチ数を含む新たなクラスの無限級数や無限積に対する代数的独立性を明らかにした。さらに、S.ChowlaやP.Erdosらによる無理数論における研究手法を発展させ、テータ零値に代表されるような単項式指数をもつ空隙級数に対して線形独立性に関する結果を導いた。

研究成果の学術的意義や社会的意義

保型形式論からの新たなアプローチを見出し、幅広い保型関数の特殊値に適用できるような代数的独立性の判定条件を構築したこと、並びにその応用として新たなクラスの超越数の実例を与えたことは重要である。本判定条件は、2つの関数値の代数的独立性と関数の比の非定数性が同値であることを主張するものであり、応用面においても有用である。今後の研究の継続・発展が期待できる。

研究成果の概要(英文)：The aim of this research is to study the arithmetical properties of the special values of modular forms. In this research, applying Nesterenko's theorem, we gave algebraic independence criterion for the values at the same point of two modular function under certain conditions. As an application, we showed algebraic independence of infinite series and products involving Fibonacci numbers. Moreover, we obtained linear independence results for certain gap series by developing the methods of S.Chowla and P.Erdos.

研究分野：数論

キーワード：代数的独立性 テータ零値 保型形式 超越数 線形独立性 無限積 フィボナッチ数 ランベルト級数

科研費による研究は、研究者の自覚と責任において実施するものです。そのため、研究の実施や研究成果の公表等については、国の要請等に基づくものではなく、その研究成果に関する見解や責任は、研究者個人に帰属します。

## 1. 研究開始当初の背景

整数論における主要な研究テーマの一つに特殊値の研究がある。これは、整数論の分野において重要な研究対象である保型形式、ゼータ関数、 $L$ 関数などの解析関数に対して、有理数や代数的数をはじめとする基本的な点における値の数論的性質を明らかにしようとするものである。種々の特殊値は、単数基準や類数などの代数的整数論における重要な数論的不变量に直結しており、整数論における解析的側面と代数的側面を結ぶ役割を担っている。

(1) 1996年、Yu.V. Nesterenkoによって得られたアイゼンシュタイン級数の特殊値に関する研究結果はその後多くの応用が見出され、関連する種々の保型形式の特殊値の数論的性質(超越性や代数的独立性など)が明らかになった。例えば、D.BertrandやD.Duverney-西岡(啓)-西岡(久)-塩川は、Nesterenkoの定理の応用として、ゼータ零値およびそれらの導関数の特殊値の数論的性質を明らかにしている。しかし、Nesterenkoの定理の直接的な応用として扱える関数族の種類や個数には一定の条件があり、あるクラスの特特殊値に対しては代数的独立性となる実例を挙げることにさえ困難な状態にあった。その現状を解決すべく、研究代表者は2015年秋頃からCarsten Elsner氏(Fachhochschule für die Wirtschaft, ドイツ)、Florian Luca氏(University of the Witwatersrand, 南アフリカ共和国)らと共に、保型形式の代表格であるゼータ零値の特特殊値研究を開始した。本研究では、ゼータ零値の倍角公式や三重積表現を用いることによって、特殊値の代数的独立性に関する結果を導くと共に、副産物として関数間の非自明な代数関係式を発見した。その一方、個々の状況に強く依存する研究手法の改良や、関連する他の保型形式への応用可能性についての検討は不十分であり課題として残されていた。

(2) S.Chowla(1947)やP.Erdős(1948)は、約数関数などの数論的関数を係数とするベキ級数を考察し、特別な有理数における値の無理数性を導いた。ゼータ零値を含むいくつかの解析関数は、この種のベキ級数を用いて表現することができるため、Chowla-Erdősの手法の発展はゼータ零値の特特殊値研究において重要である。2014年に研究代表者は、Luca氏との共同研究の下、等差数列上の素数分布に関する結果を援用することにより、Erdősらの無理数性に関する結果をより強く線形独立性へまで拡張した。一方、実数の $b$ 進展の空隙を利用する本研究手法は約数個数関数の整除性に強く依存するため、取り扱える代入点は一部の有理数に限られていた。

## 2. 研究の目的

研究開始当初の背景およびそれまでの研究成果を下に、研究期間内に以下のことを明らかにすることを目標とした。

### (1) ゼータ零値の特特殊値の数論的性質の解明とその応用

ある種の保型形式全体のなす複素ベクトル空間は有限次元であり、一定の個数を超える関数集合については代数的な関係が存在することがわかる。一方、任意に与えられた保型形式に対し、具体的な代数的関係を求めることや、関係の非存在を示すことは難しい問題である。本研究では、はじめに既存の独立性判定法が適用できるゼータ零値の集合を洗い出し、代数的独立となる関数値集合の実例を積み重ねることを目指した。また、従属的な関係がある場合については、その本質的な関係式を導出する一般的な手法についても調べることにした。その後、ゼータ零値に対して得られた知見を下に応用面での研究を進め、関連が深い保型形式の特特殊値や種々の無限級数・無限積に対する超越性や代数的独立性などの数論的性質を解明することを最終的な目的として掲げた。

### (2) Chowla-Erdősの手法の改良・発展

Chowla-Erdősの手法は有理整数を基数として展開される実数を対象とするものであるが、展開の基数をピゾ数と呼ばれる代数的整数に置き換えることができれば、フィボナッチ数列の逆数和などこれまで応用が見出されていなかったクラスの級数族が扱える。そこで、Chowla-Erdősの手法をベータ展開と呼ばれる数系上で発展・応用させ、より一般の代数体上で線形独立となる新たな数集合の実例の発見を目指した。

## 3. 研究の方法

(1) Elsner氏、Luca氏らとの共同研究により得られていたゼータ零値の代数的独立性に関する結果が、保型形式論の観点からどのように解釈できるのかを検討することとした。そこで当該分野の専門家である金子昌信氏(九州大学)を共同研究者に加え、既知のゼータ零値の間の代数関係を経由せずに、主合同部分群に関する保型関数がなす体がそなえる代数的性質のみに依存する方法により研究を進めた。本研究は、ゼータ零値の特特殊値のみならず保型関数値による表現をもつ種々の数に対して代数的独立性を議論することを可能にするものであり、幅広い応用を見据えて計画されたものである。

(2) 1989年, R. André-Jeannin はフィボナッチ数の逆数和が無理数であること示した. 本研究では, André-Jeannin の結果の無限積類似として, フィボナッチ数を含む基本的な無限積の数論的性質の解明を目指した. 特に, 既存の結果の応用可能性を検討するため, 保型関数の特殊値による表現の探索・導出を試みた. 本研究は, Daniel Duverney 氏(Lycée César Baggio, フランス)との共同研究として進められた.

(3) 2018年12月に研究集会「Functional Equations and Transcendence」(於: ゆうキャンパス・ステーション, 山形市)を開催した. 本研究集会では, 超越数論を専門とする研究者と最先端の研究結果に関する情報交換を行い, 当時取り組んでいた研究に関する国際的な位置づけや方向性について改めて確認することができた. 現地では鈴木雄太氏(立教大学)とフィボナッチ数列の部分逆数和の線形独立性に関する議論を重ね, その後共著論文の完成に至った. また, 2023年3月には研究集会「Diophantine Analysis and Related Fields 2023」(於: 弘前大学, 弘前市)の会場責任者を務めた. 招聘した研究者や海外研究者と交えて, 種々の無限積に対する超越性・代数的独立性について議論できたことは特殊値研究の大きな推進力となった.

#### 4. 研究成果

(1) テータ零値の値を添加した体の超越次数に関する D. Bertrand の結果(1997)を, 関連する既知の結果を包括する形で一般化することに成功した. 本手法は, Yu. V. Nesterenko の多項式を起点とする従来手法(Elsner-Luca-立谷(2019))とは異なるものであり, テータ零値の幅広い特殊値を扱える点で有用である. 実際, 本研究結果とテータ零値に関するラマヌジャンの恒等式を組み合わせることにより, ランベルト級数表示をもつ新たなクラスの超越数を発見することができた. 本研究成果は, Elsner 氏, 金子昌信氏(九州大学)との共同研究による.

(2) ある種の二項回帰数列を含む無限積の線形独立性・代数的独立性に関する結果を得た. 特に, これまで懸念されていたフィボナッチ数を含む無限積  $(1+1/F_n)$ ,  $(1-1/F_n)$  の有理数体上での代数的独立性を示すことに成功した. 証明では, これらの無限積に対するテータ零値の特殊値による表現が本質的な役割を果たした. また, その研究過程においてフィボナッチ数やルカ数列を含む無限積が代数的数となるような複数の closed forms を発見することができた. 本研究結果は, Duverney 氏との共同研究によるものである.

(3) アイゼンシュタイン級数値の代数的独立性を示した Nesterenko の結果(1996)を基盤とし, より一般の保型関数の特殊値に対する代数的独立性の判定条件を与えた. 主定理は, 関数値の代数的独立性が関数自身の性質に帰着されることを主張する. その応用として, デデキント・エータ関数値の有理式として表されるフィボナッチ数列とルカ数列を含む4つの基本的な無限積  $(1+1/F_n)$ ,  $(1-1/F_n)$ ,  $(1+1/L_n)$ ,  $(1-1/L_n)$  は, 有理数体上での2つも代数的独立であり, さらにどの3つも代数的従属であることがわかった. また, いくつかの無限級数や無限積に対しては具体的な代数関係式を明示した. 本研究成果は, 上記研究成果(1), (2)の融合と言える. Duverney 氏, Elsner 氏, 金子昌信氏との共同研究による.

(4) P. Erdős(1969)は, 逆数が収束するような互いに素な数列に付随するランベルト級数を考察し, そのベキ級数展開の係数は十分大きいところにおいて等比級数的に振る舞うことを確かめた. この性質は, 与えられた特殊値の $h$ 進展開の非周期性を示すものであり, 値の無理数性に直結する. 研究代表者らは, Erdősの証明を一部補完するとともに, ピゾ数などの特別な代数的整数を展開の基数にもつような数に対しても, Erdősの手法は有効であることを見出した. その結果, フィボナッチ数列やルカ数列といった二項回帰数列のある種の逆数和について, 有理数体上の線形独立性を示すことに成功した. 本研究成果は, Duverney 氏, 鈴木雄太氏(立教大学)との共同研究によるものである.

(5) 単項式指数をもつ空隙級数の有理数体上での線形独立性を証明した V. Kumar の定理を一般化し, より広いクラスの数集合に対する線形独立性を導くことに成功した. さらに, Kumar が課した条件そのものについても詳しく検討することによって, ある種の空隙級数については任意の部分和に置き換えても同様の結果が成り立つことを確かめた. 証明は, S. Chowla(1947), Erdős(1948)らによる連立合同式を利用した空隙の発見法や, K. Mahler(1953)による不定方程式の解の有限性に関する結果を用いるものであり, Kumar の手法とは本質的に異なる. 本結果は論文としてまとめ現在投稿中である. 本研究は, 村上慎太郎氏(弘前大学)との共同研究によるものである.

## 5. 主な発表論文等

〔雑誌論文〕 計9件（うち査読付論文 8件/うち国際共著 8件/うちオープンアクセス 4件）

1. 著者名 立谷洋平	4. 巻 -
2. 論文標題 代数的独立性の判定条件とその応用	5. 発行年 2023年
3. 雑誌名 第67回代数学シンポジウム報告集	6. 最初と最後の頁 19-34
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） なし	査読の有無 無
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 -
1. 著者名 D.Duverney and Y.Tachiya	4. 巻 86
2. 論文標題 Linear independence of certain sums of reciprocals of the Lucas numbers	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Periodica Mathematica Hungarica	6. 最初と最後の頁 378-394
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s10998-022-00478-2	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 D.Duverney, C.Elsner, M.Kaneko and Y.Tachiya	4. 巻 8
2. 論文標題 A criterion of algebraic independence of values of modular functions and an application to infinite products involving Fibonacci and Lucas numbers	5. 発行年 2022年
3. 雑誌名 Research in Number Theory	6. 最初と最後の頁 -
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.1007/s40993-022-00328-7	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する
1. 著者名 D.Duverney and Y. Tachiya	4. 巻 97
2. 論文標題 Algebraic independence of certain infinite products involving the Fibonacci numbers	5. 発行年 2021年
3. 雑誌名 Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences	6. 最初と最後の頁 29-31
掲載論文のDOI（デジタルオブジェクト識別子） 10.3792/pjaa.97.006	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている（また、その予定である）	国際共著 該当する

1. 著者名 D.Duverney, Y. Suzuki and Y. Tachiya	4. 巻 162
2. 論文標題 Linear independence results for sums of reciprocals of Fibonacci and Lucas numbers	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Acta Mathematica Hungarica	6. 最初と最後の頁 375-392
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1007/s10474-020-01060-3	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 D.Duverney and Y. Tachiya	4. 巻 58
2. 論文標題 Linear independence of infinite products generated by the Lucas numbers	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 The Fibonacci Quarterly	6. 最初と最後の頁 115-127
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスとしている (また、その予定である)	国際共著 該当する

1. 著者名 C. Elsner, M. Kaneko and Y. Tachiya	4. 巻 35
2. 論文標題 Algebraic independence results for the values of the theta-constants and some identities	5. 発行年 2020年
3. 雑誌名 Journal of the Ramanujan Mathematical Society	6. 最初と最後の頁 71-80
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) なし	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 D. Duverney and Y. Tachiya	4. 巻 31
2. 論文標題 Refinement of the Chowla-Erdos method and linear independence of certain Lambert series	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Forum Mathematicum	6. 最初と最後の頁 1557-1566
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.1515/forum-2018-0299	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

1. 著者名 C. Elsner, F. Luca and Y. Tachiya	4. 巻 8
2. 論文標題 Algebraic results for the values $_3(m)$ and $_3(n)$ of the Jacobi theta-constant.	5. 発行年 2019年
3. 雑誌名 Moscow Journal of Combinatorics and Number Theory	6. 最初と最後の頁 71-79
掲載論文のDOI (デジタルオブジェクト識別子) 10.2140/moscow.2019.8.71	査読の有無 有
オープンアクセス オープンアクセスではない、又はオープンアクセスが困難	国際共著 該当する

〔学会発表〕 計9件 (うち招待講演 6件 / うち国際学会 2件)

1. 発表者名 立谷洋平
2. 発表標題 Kumarの定理の一般化とその証明法について
3. 学会等名 2022大分熊本整数論研究集会 (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 村上慎太郎, 立谷洋平
2. 発表標題 単項式指数をもつ空隙級数の線形独立性について
3. 学会等名 日本数学会秋季総合分科会
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 立谷洋平
2. 発表標題 代数的独立性の判定条件とその応用
3. 学会等名 第67回代数シンポジウム (招待講演)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 Yohei Tachiya
2. 発表標題 Algebraic independence results for the infinite products involving Fibonacci and Lucas numbers
3. 学会等名 Online conference <Days of Transcendence> in occasion of Professor Yuri Nesterenko's 75th birthday (招待講演) (国際学会)
4. 発表年 2022年

1. 発表者名 立谷洋平
2. 発表標題 Algebraic independence criterion for the values of modular forms and the applications
3. 学会等名 筑波セミナー(オンライン形式)(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 立谷洋平
2. 発表標題 モジュラー関数値に対する代数的独立性の判定基準とその応用
3. 学会等名 東北大学理学部数学科談話会(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 立谷洋平
2. 発表標題 Arithmetical properties of certain infinite series and products involving the Lucas numbers
3. 学会等名 第14回ゼータ若手研究集会(オンラインによる開催)(招待講演)
4. 発表年 2021年

1. 発表者名 Yohei Tachiya
2. 発表標題 Linear independence of reciprocal sums of certain Fibonacci-type numbers
3. 学会等名 24th Central European Number Theory Conference (国際学会)
4. 発表年 2019年

1. 発表者名 Yohei Tachiya
2. 発表標題 Refinement of Chowla-Erdos method and arithmetical properties of certain Lambert series
3. 学会等名 Diophantine Analysis and Related Fields 2019
4. 発表年 2019年

〔図書〕 計0件

〔産業財産権〕

〔その他〕

-

6. 研究組織

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	ドゥベルネ ダニエル (Duverney Daniel)		
研究協力者	エルスナー カルステン (Elsner Carsten)		
研究協力者	ルカ フロリアン (Luca Florian)		

## 6. 研究組織（つづき）

	氏名 (ローマ字氏名) (研究者番号)	所属研究機関・部局・職 (機関番号)	備考
研究協力者	金子 昌信 (Kaneko Masanobu)		
研究協力者	鈴木 雄太 (Suzuki Yuta)		
研究協力者	村上 慎太郎 (Murakami Shintaro)		

## 7. 科研費を使用して開催した国際研究集会

〔国際研究集会〕 計1件

国際研究集会 Diophantine Analysis and Related Fields 2023	開催年 2023年～2023年
--	--------------------

## 8. 本研究に関連して実施した国際共同研究の実施状況

共同研究相手国	相手方研究機関			
フランス	Lycee Cesar Baggio			
ドイツ	Fachhochschule fur die Wirtschaft			
南アフリカ	University of the Witwatersrand	Centro de Ciencias Matematicas UNAM		